

# REPERE TEORETICE ÎN ACTIVITATEA DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ

Dorin Afanas, dr., conf. univ.

Laurențiu Calmuțchii, dr. hab., prof. univ.

Catedra Algebră, Geometrie și Topologie, UST

**Annotation.** In the present paper are studied the steps to solve math problems, solving simple and compound problems, synthetic and analytical methods is divided into: introduction, steps to solve math problems, solving simple and compound problems, bibliography.

**Keywords:** problem, steps to solve math problems, simple problem, composed problem, analytical method, synthetic method.

**Adnotare.** În prezenta lucrare sunt cercetate etapele de rezolvare a problemelor de matematică, rezolvarea problemelor simple și compuse, metodele analitică și sintetică fiind structurată în: introducere, etapele rezolvării problemelor de matematică, rezolvarea problemelor simple și compuse, bibliografie.

**Cuvinte cheie:** problemă, etapele rezolvării problemelor de matematică, problemă simplă, problemă compusă, metoda analitică, metoda sintetică.

## 1. Introducere

Misiunea distinctă a profesorului constă în promovarea învățării, o sarcină complexă în ea însuși. În formarea priceperilor și deprinderilor intervine cunoașterea metodelor generale precum ar fi analiza, sinteza, metoda reducerii la absurd etc., valabile în toate ramurile matematicii școlare, precum și a metodelor specifice capitolului studiat. În matematică, prin metodă înțelegem calea care trebuie urmată în vederea rezolvării unei probleme.

După cum spunea matematicianul american G. Polya [5] în lucrarea sa „Cum rezolvăm o problemă?”, în matematică nu există „o cheie magică” prin care s-ar deschide toate ușile și ar rezolva toate problemele, ci se pot da numai sfaturi de abordare a rezolvării. Sfaturile date de profesor precum: descompunerea problemei în elemente componente, căutarea unor analogii, abordarea cazurilor particulare, folosirea desenului și multe altele sunt binevenite, dar adevărata învățare se realizează prin însuși desfășurarea acestei activități.

În lucrarea amintită anterior, G. Polya scria: „Dacă doriți să rezolvați o problemă trebuie... să rezolvați probleme” [5]. Este bine și necesar să menționăm două aspecte, aparent paradoxale:

1. De multe ori se învață mai cu folos prin rezolvarea unei probleme... rezolvate (folosindu-ne de alte metode);

2. Uneori, nerezolvarea unei probleme poate fi mai utilă pentru formarea priceperilor, deprinderilor și abilităților decât rezolvările dintr-o bucată dar care în afară de satisfacția succesului imediat s-ar putea să nu lase „urme” care să fie utilizate și la alte probleme.

Formarea deprinderilor ține de însușirea unor automatisme. Din punct de vedere metodic apare contradicția între tendința de a rezolva multe exerciții pentru formarea acestor deprinderi și grija de a nu cădea în rutină, în formalism. Desigur, prin acumulări cantitative, priceperile se transformă în deprinderi.

În cadrul complexului de obiective pe care le implica predarea-învățarea-evaluarea matematicii, rezolvarea problemelor reprezintă o activitate de profunzime, cu caracter de analiză și sinteză superioară. Ea îmbină eforturile mintale de înțelegere a celor învățate și aplicare a algoritmilor cu structurile conduitei creative, inventive, totul pe fondul stăpânirii unui repertoriu de cunoștințe matematice solide (noțiuni, definiții, reguli, tehnici de calcul), precum și deprinderi de aplicare a acestora.

Valoarea formativă a rezolvărilor de probleme sporește pentru că participarea și mobilizarea intelectuală a elevilor/studentilor la o astfel de activitate este superioară altor demersuri matematice, elevii fiind puși în situația de a descoperi ei înșiși modalitățile de rezolvare și soluția, să formuleze ipoteze și apoi să le verifice, să facă asociații de idei și corelații inedite, etc.

Rezolvarea problemelor pune la încercare în cel mai înalt grad capacitățile intelectuale ale elevilor, le solicită acestora toate disponibilitățile psihice, în special inteligența.

Noțiunea de problemă are un conținut larg și cuprinde o gamă largă de preocupări și acțiuni din domenii diferite.

În sens psihologic, "o problemă" este orice situație, dificultate, obstacol întâmpinat de gândire în activitatea practică sau teoretică pentru care nu există un răspuns gata formulat.

În general, orice chestiune de natură practică sau teoretică care reclamă o soluționare, o rezolvare, poartă numele de problemă.

Referindu-ne la matematică, prin problemă se înțelege o situație a cărei soluționare se poate obține esențial prin procese de gândire și calcul. Problema de matematică reprezintă transpunerea unei situații practice sau unui complex de situații practice în relații cantitative și în care pe baza valorilor numerice date și aflate într-o anumită dependență unele față de altele și față de una sau mai multe valori numerice necunoscute, se cere determinarea acestor valori necunoscute.

În activitatea teoretică și practică omul întâlnește atât situații identice, în a căror rezolvare aplică metode și procedee standardizate de tip algoritmic, dar și situații noi pentru care nu găsește soluții în experiența dobândită sau între mijloacele deja învățate. Când situația poate fi rezolvată pe baza cunoștințelor sau deprinderilor anterior formate, deci a unor soluții existente în experiența câștigată, elevul nu mai este confruntat cu o problemă nouă. În cazul situațiilor-problemă este nevoie de explorarea situației prin aplicarea cunoștințelor și tehnicilor de care dispune rezolvatorul în momentul respectiv, scopul fiind acela al descoperirii implicației ascunse, a necunoscutei, a elaborării raționale a soluției.

Rezolvarea problemelor de matematică contribuie la clarificarea, aprofundarea și fixarea cunoștințelor învățate la acest obiect de studiu. În același timp, explicarea multora dintre problemele teoretice se realizează prin rezolvarea uneia sau mai multor probleme în cadrul cărora se subliniază o proprietate, definiție sau regulă ce urmează a fi învățate, conștientizate.

Prin rezolvarea problemelor de matematică elevii își formează deprinderi eficiente de muncă intelectuală, care se vor reflecta pozitiv și în studiul altor discipline de învățământ, își educă și cultivă calitățile moral-volitive. În același timp, activitățile matematice de rezolvare și compunere a problemelor contribuie la îmbogățirea orizontului de cultură generală a elevilor/studentilor prin utilizarea în conținutul problemelor a unor cunoștințe pe care nu le studiază la alte discipline de învățământ. Este cazul informațiilor legate de distanță, viteză, timp, preț de cost, cantitate, dimensiune, greutate, arie, durata unui fenomen etc.

Problemele de matematică, fiind legate cel mai des prin însuși enunțul lor de viață, de practică, dar și prin rezolvarea lor, generează la elevi/studenti un simț al realității de tip matematic, formându-le deprinderea de a rezolva și alte probleme practice pe care viața le pune în fața lor. Rezolvarea sistematică a problemelor de orice tip sau gen are drept efect formarea la elevi/studenti a unor seturi de priceperi, deprinderi și atitudini pozitive care le dau posibilitatea de a rezolva în mod independent probleme, de a compune ei însuși probleme.

## **2. Etapele rezolvării problemelor de matematică**

Introducerea elevilor în activitatea de rezolvare a problemelor se face progresiv, antrenându-i în depunerea de eforturi mărite pe măsura ce înaintează în studiu și pe măsura ce experiența lor rezolutivă se îmbogățește. Varietatea și complexitatea problemelor pe care le rezolvă elevii/studentii sporește efortul mental și eficiența firmativă a activității de rezolvare a problemelor. Trebuie să delimităm însă două situații în rezolvarea problemelor, situații care solicită în mod diferit mecanismele intelectuale ale elevilor/studentilor:

1. Când elevul/studentul are de rezolvat o problemă asemănătoare cu cele rezolvate anterior sau o problemă-tip (care se rezolvă prin aceeași metodă comună tuturor problemelor de tip respective). În acest caz elevul/studentul este solicitat să recunoască tipul de problemă cărui îi aparține problema dată. Prin rezolvarea unor probleme care se încadrează în aceeași categorie, având același mod de organizare a judecăților, același raționament, în mintea elevilor/studentilor se fixează principiul de rezolvare a problemei, schema mentală de rezolvare. În cazul problemelor tipice, această schemă se fixează ca un algoritm de calcul, algoritmul de rezolvare al problemei.

2. În cazul când rezolvitorul întâlnește probleme noi, necunoscute, unde nu mai poate aplica o schemă mentală cunoscută, gândirea sa este solicitată în găsirea căii de rezolvare. Experiența și cunoștințele de rezolvare, deși prezente, nu mai sunt orientate și mobilizate spre determinarea categoriei de probleme și spre aplicarea algoritmului de rezolvare. Rezolvitorul trebuie ca, pe baza datelor și a condiției problemei, să descopere drumul/calea spre aflarea necunoscutei. În felul acesta el realizează un act de creație, care constă în restructurarea datelor proprii sale experiențe și care este favorizat de nivelul flexibilității gândirii sale, de capacitatea sa combinatorică și anticipativă. În rezolvarea unei probleme, lucrul cel mai important este construirea raționamentului de rezolvare, adică a celui și de judecăți orientate către descoperirea necunoscutei.

Rezolvarea oricărei probleme trece prin mai multe etape. În fiecare din aceste etape, datele problemei apar în combinații noi, reorganizarea lor la diferite nivele ducând către soluția problemei. Este vorba de un permanent proces de analiză și sinteză (prin care se separă și reconstituie, se desprinde și se construiește raționamentul care conduce la soluția problemei), de o îmbinare aparte a analizei cu sinteza, caracterizată prin aceea că diferitele elemente luate în considerație își dezvăluie mereu noi aspecte (analiza) în funcție de combinațiile în care sunt plasate (sinteza).

Procesul de rezolvare a unei probleme presupune deducerea și formarea unor ipoteze, verificarea lor. Dar formularea acestor ipoteze nu este rezultatul unei simple inspirații, ci presupune atât un fond de cunoștințe în rezolvarea problemelor, cât și o gamă variată de deprinderi și abilități intelectuale necesare în procesul rezolvării problemelor. Diferitele ipoteze (enunțuri ipotetice care ne vin în minte în legătură cu problema pusă) nu apare la întâmplare. Ele iau naștere pe baza asociațiilor, pe baza cunoștințelor asimilate anterior. Cu cât aceste cunoștințe sunt mai largi și mai profunde, cu atât sunt mai mari șansele ca ipotezele care se nasc în mintea rezolvitorului să îl conducă mai repede la o soluție, cu cât fondul din care sunt alese ipotezele este mai bogat, cu atât alegerea este mai bună. De aceea în orice domeniu, capacitatea de a rezolva probleme complexe este condiționată de o solidă pregătire de specialitate, dar și de cultură generală.

În rezolvarea problemelor intervin o serie de tehnici, procedee, moduri de acțiune, deprinderi și abilități de muncă intelectuală independentă. Astfel sunt necesare unele deprinderi și abilități cu caracter mai general cum sunt: orientarea activității mintale asupra datelor problemei, punerea în legatura logică a datelor, capacitatea de a izola ceea ce este cunoscut de ceea ce este necunoscut, extragerea acelor cunoștințe care ar putea servi la rezolvarea problemei precum și unele deprinderi specifice referitoare la detaliile acțiunii (cum sunt cele de genul deprinderilor de calcul).

Cu toată varietatea lor, problemele de matematică nu sunt independente, izolate, ci fiecare problemă se încadrează într-o anumită categorie.

Prin rezolvarea unor probleme care se încadrează în aceeași categorie, având același mod de organizare a judecăților, deci același raționament, în mintea rezolvitorului se conturează schema mentală de rezolvare, ce se fixează ca un algoritm sau semialgoritm de lucru, care se învață, se transferă și se aplică la fel ca regulile de calcul.

Aflarea căii de rezolvare a unei probleme este mult mai ușoară în cazul în care se poate subsuma problema nouă unei categorii, unui tip determinat de probleme, deja cunoscute. Dar această subsumare se poate face corect numai dacă au fost înțelese particularitățile tipice ale categoriei respective, raționamentul rezolvării ei, dacă se descoperă și recunoaște în orice condiții concrete s-ar prezenta problema (domeniul la care se referă, mărimea și natura datelor etc.).

De o mare importanță în rezolvarea problemelor este înțelegerea structurii problemei și a logicii rezolvării ei. Pentru a ajunge la generalizarea raționamentului comun unei categorii

de probleme, trebuie să fie formate capacitățile de a analiza și de a înțelege datele problemei, de a sesiza condiția problemei și de a orienta logic șirul de judecăți către întrebarea problemei.

În activitatea de rezolvare a unei probleme se parcurg mai multe etape. La fiecare etapă are loc un proces de reorganizare a datelor și de reformulare a problemei, pe baza activității de orientare a rezolvitorului pe drumul și în direcția soluției problemei. Aceste etape sunt:

**1. Cunoașterea enunțului problemei.** Iată întrebările care trebuie să ni le formulăm în această primă etapă: Care este necunoscuta? Care sunt datele? Care este condiția? Care este cerința? Este suficientă condiția pentru a determina cerința? Trebuie să executăm un desen sau nu? Care sunt noutățile corespunzătoare? Care sunt diversele părți ale condiției? Segmentele condiției se pot scrie în limbaj matematic sau nu?

Este etapa de început în rezolvarea oricărei probleme. Rezolvitorul trebuie să afle care sunt datele.

**2. Înțelegerea enunțului problemei.** Nu este posibil ca elevul/studentul să formuleze ipoteze și să construiască raționamentul rezolvării problemei decât în măsura în care cunoaște termenii în care se pune problema. Enunțul problemei conține un minim necesar de informații. Datele și condiția problemei reprezintă termenii de orientare a ideilor, a analizei și sintezei, precum și a generalizărilor ce se fac treptat pe măsura ce se înaintează spre soluție. Întrebarea problemei indică direcția în care trebuie să se orienteze formularea ipotezelor. Acest minim de informații trebuie recepționat în mod optimal de către rezolvitor prin citirea textului problemei, prin ilustrarea cu imagini sau chiar cu acțiuni când este cazul.

Nerecepționarea corectă a enunțului problemei generează multe dificultăți în activitatea de rezolvare, cum ar fi: schimbarea sensului unor date, neglijarea lor, luarea în considerație a unor informații care nu au funcție de "date" ale problemei etc.

**3. Întocmirea planului (construirea modelului matematic).** Am învățat vre-o teoremă care ar putea fi aplicată aici? Cunoaștem vre-o problemă înrudită având aceeași necunoscută, sau căreia am putea să-i folosim metoda de rezolvare? Nu am putea să introducem un element auxiliar pentru a o face utilizabilă? Am putea-o reformula? Ne putem imagina o problemă mai generală? Dar una particulară? Au fost utilizate toate datele problemei?

**4. Enunțăm relațiile dintre date și necunoscute.** Aceste relații pot fi egalități, inegalități sau de altă formă și ele vor forma așa-numitul model matematic al problemei.

**5. Rezolvarea modelului matematic.** Transformăm elementele care ni se dau și cele necunoscute. Încercăm să introducem elemente noi, mai apropiate de datele problemei.

**6. Analiza soluțiilor obținute, compararea lor, alegerea celor optime, alegerea celor corecte.**

**7. Prezentarea unui răspuns corect conform ipotezei problemei**

**8. Activități suplimentare:**

– generalizăm, cercetăm cazurile particulare, aplicăm analogii;

– verificăm soluția/soluțiile găsită/găsite;

– *interpretăm datele obținute*. Se aleg soluțiile practice. Nu există oare o altă cale mai directă care să ne ducă la același rezultat ? Se consemnează soluțiile găsite;

– *compunerea de probleme după o schemă asemănătoare*.

### **3. Rezolvarea problemelor simple și compuse**

Primele probleme simple sunt acelea pe care și le pune copilul zilnic în școală, în familie, în timpul jocului și care sunt ilustrate cu exemple familiare lui. Pentru ai face să vadă încă din clasa întâi utilitatea activității de rezolvare a problemelor este necesar ca micii școlari să înțeleagă faptul că în viața cotidiană sunt situații când trebuie găsit un răspuns la diferite întrebări.

Rezolvarea primelor probleme se realizează la un nivel concret, ca acțiuni de viață, ilustrate prin imagini sau chiar prin acțiuni executate de copii. În această fază, activitatea de rezolvare a problemelor se află foarte aproape de cea de calcul. Introducerea în rezolvarea problemelor simple se face încă din perioada pregătitoare primelor operații.

Rezolvarea problemei simple reprezintă un proces de analiză și sinteză în cea mai simplă formă. Problema cuprinde valorile numerice (datele cunoscute și întrebarea). La cea mai simplă analiză a întrebării problemei se ajunge la valorile numerice, și la cea mai simplă sinteză a valorilor numerice se ajunge la întrebarea problemei. Elevul trebuie să transpună relația dintre valorile numerice într-o operație de scădere sau adunare.

El nu va putea să sesizeze relația justă care duce la rezolvarea problemei, nu va putea descoperi soluția problemei, decât în măsura în care va fi conștient de semnificația valorilor numerice și de rezolvarea problemei.

A rezolva în mod conștient o problemă simplă, înseamnă a cunoaște bine punctul de plecare (valorile numerice și relația dintre ele) și punctul la care trebuie să se ajungă (întrebarea problemei), înseamnă a stabili între acestea o relație justă, adică a alege operația adecvată pentru rezolvarea problemei.

Spre deosebire de rezolvarea problemelor simple, rezolvarea problemelor compuse reprezintă un fenomen psihic mai complex.

Problema compusă fiind alcătuită din mai multe probleme simple, cuprinde un complex de situații concrete, de relații în care se cere să se determine o valoare numerică necunoscută pe baza unor valori numerice date, care se găsesc într-o anumită dependență una de alta și toate față de mărimea căutată.

Problema compusă este alcătuită din mai multe probleme simple, care se succed într-o înlănțuire logică. Conținutul problemei compuse are nu numai două valori numerice, ci mai multe.

Când se rezolvă o problemă compusă, aparent se rezolvă pe rând mai multe probleme simple. În esență, nu este vorba de probleme simple care se rezolvă izolat. Acestea fac parte din structura problemei compuse, rezolvarea fiecăreia dintre ele făcându-se în direcția aflării necunoscutei, fiecare problemă simplă rezolvată reprezentând un pas înainte, o verigă pe calea raționamentului problemei compuse, de natură să reducă treptat numărul datelor necunoscute.

Pentru rezolvarea problemelor trebuie să se aleagă din toate valorile numerice perechi de valori care se leagă între ele printr-o relație determinată. Aceasta este o activitate dificilă, care cere un anumit efort al gândirii și o anumită experiență. De altfel, această alegere a valorilor numerice nu se face numai în scopul sistematizării lor, ci constituie desprinderea problemelor simple din cadrul problemei compuse. Este vorba de un proces de analiză, care trebuie orientat către sinteza ce urmează, către întrebarea problemei.

Rezolvarea problemelor poate fi realizată pe cale sintetică sau analitică.

Calea sintetică reprezintă drumul de la datele cunoscute către întrebările problemei, de la cunoscut la necunoscut și după părerea unor specialiști [1, 2, 3, 4], este mai simplă decât calea analitică.

Calea analitică pornește de la întrebare către datele cunoscute ale problemei, utilizează deducția și de obicei se consideră mai dificilă, obligă rezolvitorul la un efort mai mare, solicită mai mult gândirea.

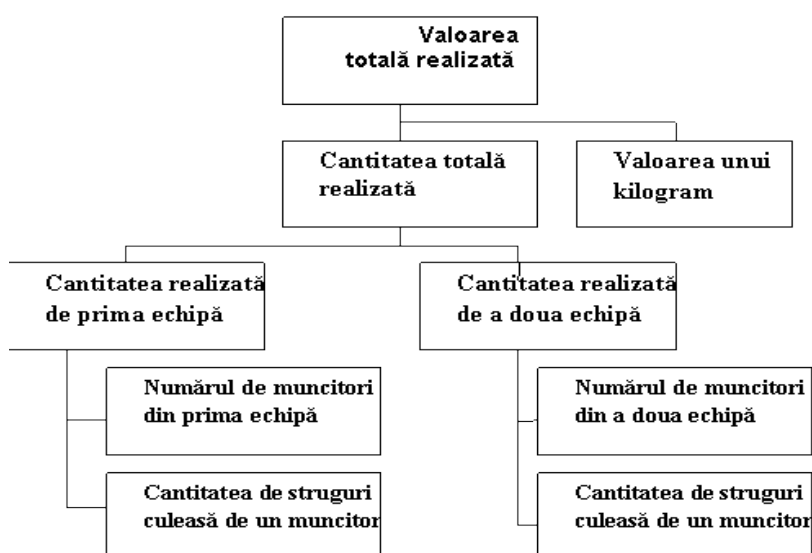
Pentru a vedea cum folosim aceste metode vom cerceta următoarea problemă:

**Problemă.** La o fermă viticolă lucrează două echipe: prima are 10 muncitori care culeg zilnic câte 240 kg de struguri și a doua formată din 12 muncitori care culeg zilnic câte 220 kg de struguri fiecare. Știind că prețul unui kilogram de struguri este de 10 lei, aflați valoarea totală realizată într-o zi de cele două echipe.

Metoda analitică. Plecând de la întrebarea problemei pentru aflarea valorii totale, trebuie să cunoaștem cantitatea totală de struguri culeasă de cele două echipe.

Această cantitate se poate afla cunoscând cantitatea de struguri culeasă de prima echipă și cantitatea culeasă de a doua echipă.

Schematic, va arăta astfel:



Cu această schemă vom transpune enunțul problemelor simple în care s-a descompus problema, sub forma unui plan de rezolvare:

1. Care este cantitatea de struguri culeasă de prima echipă ?

$$240 \text{ kg} \times 10 = 2400 \text{ kg}$$

2. Care este cantitatea de struguri culeasă de a doua echipă ?

$$220 \text{ kg} \times 12 = 2640 \text{ kg}$$

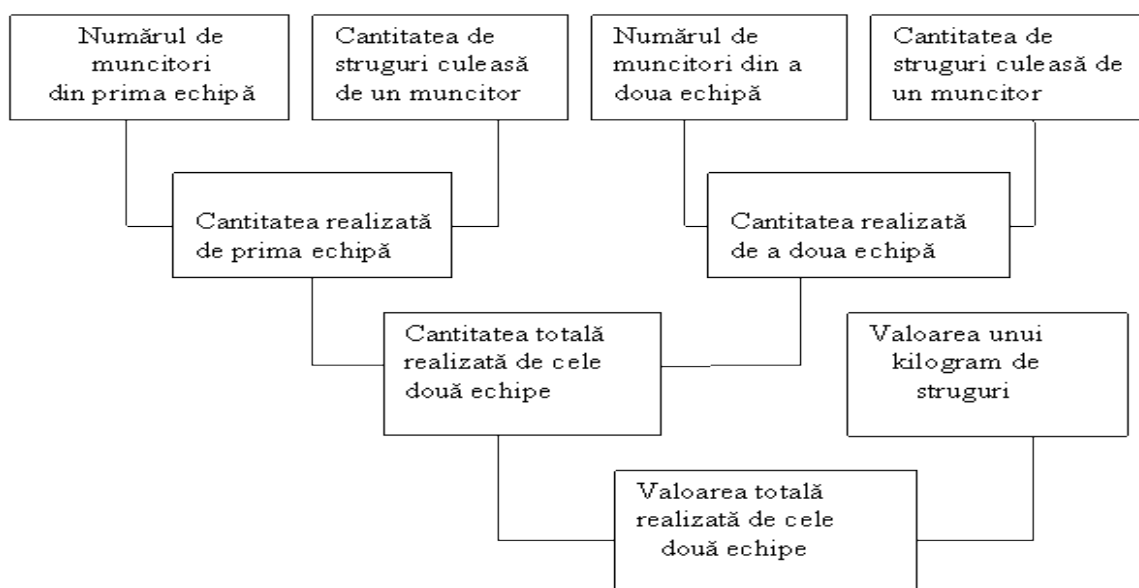
3. Care este cantitatea de struguri culeasă de cele două echipe ?

$$2400 \text{ kg} + 2640 \text{ kg} = 5040 \text{ kg}$$

4. Care este valoarea totală realizată de cele două echipe ?

$$10 \text{ lei} \times 5040 = 50400 \text{ lei.}$$

Metoda sintetică. Schematic se poate expune astfel:



Planul de rezolvare coincide cu cel realizat la metoda analitică.

Cele două metode generale, având la bază cele două operații ale gândirii se găsesc într-o strânsă conexiune cauzată de cele două metode: analitică și sintetică, care se condiționează reciproc.

Din acest motiv utilizarea acestor două metode nu poate fi separată total, ci putem avea în anumite momente o tentă dominantă a uneia dintre ele, dar în rezolvarea unei probleme intervin ambele operații ale procesului de gândire.

Într-o problemă compusă, descompunerea ei în probleme simple presupune un proces de analiză, iar formularea planului de rezolvare și a succesiunii logice presupune un proces de sinteză.

Acestea fac ca cele două metode să apară sub denumirea de „metoda analitico-sintetică”.

## Bibliografie

1. Banea H. Metodica predării matematicii. Editura Paralela 45, Pitești, 1997.
2. Brânzei D., Brânzei R. Metodica predării matematicii. Editura Paralela 45, Pitești, 2000.
3. Cerghit I. Metode de învățământ. București: EDP, 1997.
4. Cîrjan F. Didactica Matematicii. Editura Corint, București, 2007.
5. Polya G. Cum rezolvăm o problemă. București: Științifică și Enciclopedică, 1965.