3. Ricker R. J., Hudson A., Provence S., Norton D. T., Olesberg J. T., Murray L. M., Prineas J. P., Boggess T. F., Ieee J. Quantum Elect 51(12), 1-6 (2015).
4. Postolachi I. American Institute of Physics. Proceedings of the physics conference TIM-08. Melville, New-York, 2009. pp.92-95.
5. Li X. C., Jiang D. W., Zhang Y., Zhao L. C. SuperlatticeMicrost 91, 238-243 (2016).
6. Merghem K., Teissier R., Aubin G., Monakhov A. M., Ramdane A., Baranov A. N. Applied Physics Letters 107(11), 2015.
7. Le H. Q., Turner G. W., Eglash S. J., Choi H. K., Coppeta D. A. Applied Physics Letters, 64(2), 152-154, 1994.
8. Hvosticov V.P. ş.a .FTP. 40 (10), 1275, 2006.
9. Aliyev M.I., Khalilova A.A., Arasly D.H., Rahimov R.N., Tanoglu M., Ozyuzer L. Strain gauges of GaSb-$FeGa_{1.3}$ eutectic composites. Appl. Phys.:A, 79, (8), 2075-2079, 2004.
10. Rogalski A., Martyniuk P., Kopytko M. Applied Physics Reviews 4, 031304, 2017.

INTEGRABILITATEA DARBOUX PENTRU SISTEMELE DIFERENȚIALE CUBICE CE POSEDĂ TREI DREPTE INVARIANTE REALE ÎN POZIȚIE GENERICĂ A CĂROR MULTIPLICITATE TOTALĂ ESTE EGALĂ CU ȘASE ÎMPREUNĂ CU DREAPTA DE LA INFINIT

Vadim Repeșco, dr., conf. univ. inter.
Catedra AMED, Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. Fie sistemul diferențial cubic general $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$, unde $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$, $\max\{\deg P, \deg Q\} = 3$, $GCD(P, Q) = 1$. Conform [1], un sistem diferențial este integrabil Darboux, dacă sistemul dat posedă un număr suficient de drepte invariante considerate cu multiplicitățile lor. În această lucrare se obțin 2 sisteme ce reprezintă formele canonice ale sistemelor diferențiale cubice ce posedă trei drepte invariante reale în poziție generică a căror multiplicitate totală este egală cu șase împreună cu dreapta de la infinit. Mai mult de atât, sunt calculați factorii lor integranți de tip Darboux.

Abstract. Consider the general cubic differential system $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$, where $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$, $\max\{\deg P, \deg Q\} = 3$, $GCD(P, Q) = 1$. According to [1], a differential system is Darboux integrable if this system has sufficiently many invariant straight lines considered with their multiplicities. In this paper we obtain 2 canonical forms of cubic differential systems which possess three real invariant straight lines in generic position of total multiplicity seven including the straight line at the infinity. Moreover, we compute their Darboux integrating factors.

Cuvinte cheie: sistem diferențial cubic, dreaptă invariantă, integrabilitate Darboux.
Keywords: cubic differential system, invariant straight line, Darboux integrability.

Introducere

Considerăm sistemul diferențial polinomial real de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases}, \qquad GCD(P,Q) = 1 \tag{1}$$

și câmpul vectorial asociat acestui sistem

$$\mathbb{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2}$$

Notăm prin $n = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. Dacă $n = 2$, atunci sistemul se numește pătratic, iar dacă $n = 3$, atunci sistemul se numește cubic.

Definiția 1: *Funcția $F(x,y)$ se numește integrală primă a sistemului diferențial (1) pe domeniul deschis D din $\mathbb{R}^2$, dacă funcția $F(x,y)$ este o funcție neconstantă în acest domeniu, dar este constantă pe fiecare traiectorie $(x(t), y(t)) \in D$ determinată de soluția sistemului (1).*

Definiția 2: *O curbă algebrică $f(x,y) = 0$, $f \in \mathbb{C}[x,y]$ se numește curbă algebrică invariantă a sistemului (1), dacă există un polinom $K_f \in \mathbb{C}[x,y]$, astfel încât are loc identitatea*

$$\mathbb{X}(f) = f(x,y)K_f(x,y). \tag{3}$$

Sistemul (1) se numește integrabil Darboux, dacă există o funcție neconstantă de forma $F = f_1^{\lambda_1} \cdot f_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot f_s^{\lambda_s}$, unde f_j este o curbă algebrică invariantă și $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,s}$, astfel încât F este sau o integrală primă, sau un factor integrant pentru (1). În lucrarea [1] s-a demonstrat că sistemul diferențial (1) este integrabil Darboux, dacă el posedă un anumit număr de drepte invariante (ce se contorizează împreună cu multiplicitățile lor). Numărul suficient de drepte invariante depinde de gradul sistemului diferențial polinomial.

Teorema 1: *Pentru ca sistemul (1) să posede integrală primă Darboux (factor integrant Darboux) este necesar și suficient ca să existe așa constante α_i, $i = 1,\ldots,s$ nu toate identic egale cu zero, încât să aibă loc identitatea:*

$$\alpha_1 K_{f_1}(x,y) + \alpha_2 K_{f_2}(x,y) + \ldots + \alpha_s K_{f_s}(x,y) \equiv 0 \tag{4}$$

$$\left(\alpha_1 K_{f_1}(x,y) + \alpha_2 K_{f_2}(x,y) + \ldots + \alpha_s K_{f_s}(x,y) \equiv -\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \right) \tag{5}$$

Curbele algebrice invariante de ordinul I de forma $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ se numesc drepte invariante. Există mai multe tipuri de multiplicități pentru curbele algebrice invariante, de exemplu: multiplicitate paralelă, multiplicitate geometrică, multiplicitate algebrică etc. Definițiile diferitor tipuri de multiplicități sunt aduse în [2]. Tot din această lucrare aducem definiția multiplicității algebrice pe care o vom folosi în continuare.

Definiția 2: *Fie* $\mathbb{C}_m[x]$ *spațiul vectorial de polinoame pe* $\mathbb{C}[x]$ *de gradul maxim* m*. Atunci acest spațiu are dimensiunea* $R = C_{n+m}^n$*. Fie* $v_1, v_2, ..., v_R$ *o bază a spațiului* $\mathbb{C}_m[x]$*. Dacă* k *este cel mai mare număr natural încât funcția* $f(x,y)$ *ridicată la puterea* k *divide polinomul* $\det M_R$*, unde*

$$M_R = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_R \\ \mathbb{X}(v_1) & \mathbb{X}(v_2) & ... & \mathbb{X}(v_R) \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbb{X}^{R-1}(v_1) & \mathbb{X}^{R-1}(v_2) & ... & \mathbb{X}^{R-1}(v_R) \end{pmatrix},$$

atunci curba algebrică invariantă f *de gradul* m *a câmpului vectorial* $\mathbb{X}$ *posedă multiplicitatea algebrică* k.

Expresia $\mathbb{X}^{R-1}(v_1)$ semnifică aplicarea operatorului $\mathbb{X}$ de $R-1$ ori asupra vectorului v_1, adică $\mathbb{X}^{k+1}(v_i) = \mathbb{X}(\mathbb{X}^k(v_i))$.

Numeroase lucrări sunt consacrate studiului sistemelor diferențiale polinomiale cu drepte invariante. În [3] se estimează numărul de drepte invariante ce poate avea un sistem diferențial polinomial. Problema coexistenței dreptelor invariante și a ciclurilor limită este studiată în [4,5], iar problema coexistenței pentru sistemele cubice a dreptelor invariante și a punctelor singulare de tip centru este cercetată în [6,7]. Clasificarea tuturor sistemelor cubice ce posedă nouă drepte invariante incluzând și multiplicitățile lor a fost efectuată în [8,9]. Sistemele cubice ce posedă exact opt drepte invariante au fost studiate în [10]. În [11,12] au fost studiate sistemele cubice cu șase drepte invariante reale de-a lungul a două și trei direcții.

În această lucrare se va demonstra că sistemele diferențiale cubice ce au trei drepte invariante situate în poziție generică a căror multiplicitate totală este egală cu șase (incluzând dreapta de la infinit) sunt integrabile Darboux.

Rezultatul principal

Teorema 2: *Orice sistem diferențial cubic ce posedă trei drepte în poziție generică de multiplicitatea totală șase împreună cu dreapta de la infinit este integrabil Darboux și printr-o transformare afină și rescalare a timpului poate fi adus la unul din următoarele două forme canonice:*

1. $\begin{cases} \dot{x} = x^2(x-1), & a \neq 0, \\ \dot{y} = y(-ay + x^2 + axy + ay^2), \end{cases}$ *cu dreptele invariante planare* $\begin{array}{l} l_1 \equiv x-1, l_{2,3} \equiv x, \\ l_{4,5} \equiv y, l_6 \equiv x+y-1, \end{array}$

$$\mu(x,y) = \frac{x-1}{x^2y^2(x+y-1)} \quad \text{- factorul integrant.}$$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x(ax - y - ax^2 - axy), \\ \dot{y} = y(1-y), \ \mathrm{a} \neq 0, \end{cases}$ *cu dreptele invariante planare* $\begin{array}{l} l_{1,2} \equiv x, l_3 \equiv y-1, \\ l_4 \equiv y, l_5 \equiv x+y-1, \end{array}$

$$\mu(x,y)=\frac{y-1}{x^2y(x+y-1)}$$ - *factorul integrant.*

Remarcăm că prin poziție generică a trei drepte înțelegem poziția a trei drepte distincte concurente ce nu se intersectează într-un punct, adică se intersectează două câte două.

Metode aplicate

Vom cerceta sistemul diferențial cubic, adică sistemul (1) de forma

$$\begin{cases}\dot{x}=a_0+P_1(x,y)+P_2(x,y)+P_3(x,y),\\ \dot{y}=b_0+Q_1(x,y)+Q_2(x,y)+Q_3(x,y),\end{cases} \tag{6}$$

unde $P_i(x,y)$ și $Q_i(x,y)$, $i=\overline{1,3}$ sunt polinoame omogene de gradul i, iar coeficienții acestor polinoame sunt parametri reali arbitrari, adică $P_i(x,y)=\sum_{j=0}^{i}a_{i-j,j}x^{i-j}y^j$, $Q_i(x,y)=\sum_{j=0}^{i}b_{i-j,j}x^{i-j}y^j$, $i=\overline{1,3}$.

Pe lângă condițiile de existență a dreptelor invariante, vom folosi condiții de multiplicitate. Conform definiției 2, obținem pentru sistemul diferențial cubic cu drepte invariante că $R=C_3^2=3$, iar drept bază a spațiului vectorial de polinoame $\mathbb{C}_1[x]$ putem alege $v_1=1, v_2=x, v_3=y$. Atunci matricea M_R va avea forma

$$M_R=\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & P(x,y) & Q(x,y)\\ 0 & \mathbb{X}(P) & \mathbb{X}(Q)\end{pmatrix}.$$

În acest caz, polinomul $\det M_R$ are forma $\det M_R=P\mathbb{X}(Q)-Q\mathbb{X}(P)$ și este un polinom de gradul 8 în raport cu x și y. Astfel, dreapta $x=0$ este invariantă dacă și numai dacă polinomul $\det M_R$ poate fi scris sub forma $\det M_R=x\sum_{i=0}^{7}A_i(y)x^i$, unde $\deg\{A_i(y)\}=7-i$. În plus, dacă polinoamele $A_0(y), A_1(y),...,A_k(y)$, $k\in\overline{1,6}$, sunt identic egale cu zero, atunci dreapta $x=0$ are multiplicitatea algebrică egală cu $k+2$.

Pentru a studia multiplicitatea dreptei de la infinit, efectuăm transformarea Poincaré $x=\frac{1}{\overline{x}}$, $y=\frac{\overline{y}}{\overline{x}}$. Multiplicitatea dreptei de la infinit coincide cu multiplicitatea dreptei $\overline{x}=0$ a sistemului

$$\begin{cases}\dot{\overline{x}}=\overline{y}\overline{x}^3P\left(\frac{1}{\overline{x}},\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right)-\overline{x}^3Q\left(\frac{1}{\overline{x}},\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right),\\ \dot{\overline{y}}=\overline{x}^4P\left(\frac{1}{\overline{x}},\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right).\end{cases}$$

Obținerea sistemelor

Inițial dorim să obținem sistemele cubice ce posedă trei drepte în poziție generică. Două din aceste trei drepte invariante pot fi făcute să coincidă cu axele de coordinate. Într-adevăr, aducem Lema 1.3.2 din [13]:

Lemă: *Dacă* $l_j = \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j = 0, \quad j = 1,2, \ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, *sunt două drepte invariante reale pentru sistemul (6), atunci transformarea* $(x,y) \to (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1, \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)$ *reduce acest sistem la unul de forma Lotka-Volterra*

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y + a_{30}x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2\right), \\ \dot{y} = y\left(b_{01} + b_{11}x + b_{02}y + b_{21}x^2 + b_{12}xy + b_{03}y^2\right). \end{cases} \tag{7}$$

A treia dreaptă invariantă este de forma $l_3 = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0$. Observăm că această dreaptă la intersecția cu dreptele invariante l_1 și l_2 generează două puncte singulare $\left(0, -\frac{\gamma_3}{\beta_3}\right)$ și $\left(-\frac{\gamma_3}{\alpha_3}, 0\right)$. Printr-o scalare a axelor de coordonate, vom aduce aceste puncte $\left(0, -\frac{\gamma_3}{\beta_3}\right) \to (0,1)$ și $\left(-\frac{\gamma_3}{\alpha_3}, 0\right) \to (1,0)$. Astfel, dreapta l_3, ce trece prin aceste puncte, o vom căuta sub forma $l_3 = x + y - 1 = 0$. Sistemul (7) posedă dreapta invariantă l_3 dacă și numai dacă au loc condițiile $a_{30} = -a_{10} - a_{20}$, $b_{03} = -b_{01} - b_{02}$, $b_{21} = -a_{10} + a_{12} - a_{20} - a_{21} + b_{01} + b_{02} + b_{12}$ și $b_{12} = -a_{10} - a_{11} - a_{12} - 2b_{01} - b_{02} - b_{11}$. Astfel, sistemul (7) ce are dreapta invariantă l_3 sau sistemul sistemul (5) ce posedă dreptele invariante $l_1 \equiv x$, $l_2 \equiv y$ și $l_3 \equiv x + y - 1$ are forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(a_{10} + a_{20}x + a_{11}y - (a_{10} + a_{20})x^2 + a_{21}xy + a_{12}y^2\right) \\ \dot{y} = y(b_{01} + b_{11}x + b_{02}y - (2a_{10} + a_{11} + a_{20} + a_{21} + b_{01} + b_{11})x^2 - \\ \quad -(a_{10} + a_{11} + a_{12} + 2b_{01} + b_{02} + b_{11})xy - (b_{01} + b_{02})y^2) \end{cases} \tag{8}$$

Sistemul dat are drepte aflate în poziție generică pe care îl vom nota prin (1,1,1)+1. Notația dată ne permite să descriem numărul de drepte invariante, direcțiile lor și multiplicitatea fiecărei drepte invariante. De exemplu, configurația (1(4),1,1)+1(3) constă din 3 drepte distincte în planul finit după 3 direcții, o dreaptă din acestea are multiplicitatea 4 și dreapta de la infinit are multiplicitatea 3.

Considerăm sistemul diferențial (8) ce are dreptele invariante l_1, l_2 și l_3 cu multiplicitatea totală egală cu șase incluzând dreapta de la infinit. Atunci sistemul dat poate avea drepte doar de configurațiile

1. (1(3),1,1)+1 **2.** (1(2),1(2),1)+1

3. (1(2),1,1)+1(2) **4.** (1,1,1)+1(3)

1. (1(3),1,1)+1 Conform definiției multiplicității algebrice a dreptelor invariante, sistemul (8) posedă configurația (1(2),1,1)+1 de drepte invariante dacă și numai dacă polinomul $A_0(y)$ se anulează, unde

$$
\begin{aligned}
A_0(y) &= a_{10}(a_{10}-b_{01})b_{01}+a_{10}\left(a_{10}b_{01}+2a_{11}b_{01}-b_{01}^2+a_{10}b_{02}-3b_{01}b_{02}\right)y+\left(2a_{10}a_{11}b_{01}+a_{11}^2b_{01}+\right.\\
&+2a_{10}a_{12}b_{01}+3a_{10}b_{01}^2+a_{12}b_{01}^2+2a_{10}a_{11}b_{02}+a_{10}b_{01}b_{02}-a_{11}b_{01}b_{02}-\left.2a_{10}b_{02}^2\right)y^2+\left(a_{11}^2b_{01}+2a_{10}a_{12}b_{01}+\right.\\
&+2a_{11}a_{12}b_{01}+3a_{10}b_{01}^2+2a_{11}b_{01}^2+a_{12}b_{01}^2+a_{11}^2b_{02}+2a_{10}a_{12}b_{02}+6a_{10}b_{01}b_{02}+a_{11}b_{01}b_{02}+a_{12}b_{01}b_{02}+\\
&+\left.3a_{10}b_{02}^2-a_{11}b_{02}^2\right)y^3+(a_{12}+b_{01}+b_{02})(2a_{11}b_{01}+a_{12}b_{01}+2a_{11}b_{02})y^4+a_{12}(b_{01}+b_{02})(a_{12}+b_{01}+b_{02})y^5
\end{aligned}
$$

Egalând acest polinom cu zero, se obțin 7 seturi de condiții asupra coeficienților sistemului (8), adică obținem 7 sisteme cubice cu drepte invariante de configurația (1(2),1,1)+1. Însă, punând condiția ca dreapta invariantă $l_1 = x = 0$ să aibă multiplicitatea trei, adică pentru fiecare sistem cerem $A_1(y)=0$, obținem mulțime vidă. Am arătat că sistemele cubice nu pot avea drepte invariante de configurația (1(3),1,1)+1.

2. (1(2),1(2),1)+1 Punând condiția ca dreapta invariantă $l_2 = y = 0$ să aibă multiplicitatea doi pentru cele 7 sisteme de configurația (1(2),1,1)+1, obținem o unică soluție. Adică există un singur sistem cu drepte invariante de configurația (1(2),1(2),1)+1 ce are forma

$$
\begin{cases}
\dot{x} = -a_{20}(-1+x)x^2,\\
\dot{y} = -y\left(a_{20}x^2-b_{02}y+b_{02}xy+b_{02}y^2\right).
\end{cases}
$$

Introducând parametrul a_{20} în timp și notând $\dfrac{b_{02}}{a_{20}} = a$, cu condiția $a \neq 0$, obținem sistemul 1 din Teorema 2.

3. (1(2),1,1)+1(2) Punând condiția ca dreapta invariantă de la infinit să aibă multiplicitatea doi pentru cele 7 sisteme de configurația (1(2),1,1)+1, obținem două soluții algebrice. Analog sistemului 1, efectuând unele notații și transformări, sistemele obținute sunt aduse la forma sistemului 2 din Teorema 2. Adică, soluțiile obținute generează o singură formă canonică cu drepte invariante de configurația (1(2),1,1)+1(2).

4. (1,1,1)+1(3) A rămas de studiat configurația (1,1,1)+1(3). Cerând ca sistemul (6) să posede dreapta invariantă de la infinit de multiplicitatea 2, adică să aibă drepte invariante de configurația (1,1,1)+1(2), obținem 6 soluții. Însă, condiția ca infinitul să aibă multiplicitatea 3 ne dă mulțime vidă, adică sisteme diferențiale cubice de configurația (1,1,1)+1(3) nu există.

Remarcăm că sistemului cubic (6) i-au fost impuse condiții de existență a trei drepte invariante planare care să posede multiplicitatea șase împreună cu dreapta de la infinit. Însă, pentru ambele sisteme obținute, a mai apărut o dreaptă invariantă în plus, astfel încât multiplicitatea tuturor dreptelor invariante a devenit șapte. Aceste sisteme nu posedă integrale de tip Darboux, dar folosind formula (5), se arată că ele posedă factori integranți de tip Darboux și ei sunt aduși în Teorema 2.

Bibliografie

1. Llibre J., Xiang Zh. On the Darboux Integrability of Polynomial Differential Systems. Qual. Theory Dyn. Syst., 2012.
2. Christopher C., Llibre J., Pereira J. V. Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. Pacific Journal of Mathematics, 329, 2007, nr. 1, p. 63-117.
3. Artes J., Grunbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems. Pacific Journal of Mathematics, 1998, 184, No. 2, 207–230.
4. Guangjian S, Jifang S. The n-degree differential system with (n − 1)(n + 1)/2 straight line solutions has no limit cycles. Proc. of Ordinary Differential Equations and Control Theory, Wuhan, 1987, 216–220 (in Chinese).
5. Kooij R. Cubic systems with four line invariants, including complex conjugated lines. Math., Proc. Camb. Phil. Soc., 1995, 118, No. 1, 7–19.
6. Cozma D., Șubă A. The solution of the problem of center for cubic differential systems with four invariant straight lines. Mathematical analysis and applications, Iași, 1997, 44, suppl., 517–530.
7. Șubă A., Cozma D. Solution of the problem of the center for cubic differential system with three invariant straight lines in generic position. Qualitative Theory of Dynamical Systems. Universitat de Lleida. Spaine, 2005, 6, 45–58.
8. Llibre J., Vulpe N. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines. Rocky Mountain J. Math., 2006, 36, No. 4, 1301—1373.
9. Bujac C. One new class of cubic systems with maximum number of invariant omitted in the classification of J.Llibre and N.Vulpe. Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold., Mat., 2014, No. 2(75), 102-105.
10. Bujac C, Cubic differential systems with invariant lines of total multiplicity eight, doctor thesis in mathematics. Chișinău ,2016. 165 pages.
11. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along two directions. Studia Universitatis. Seria Ştiinţe Exacte şi Economice, 2008, no. 8(13), 5-16.
12. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along three directions. Bulletin of ASRM. Mathematics, 2009, no. 2(60), 111-130.
13. Repeșco V. Sisteme cubice de ecuații diferențiale cu drepte invariante. Ph.D. Thesis, 2013, 134 p.