CZU: 372.8519.1

INTERDISCIPLINARITATE: INTEGRAREA IDEILOR DIN COMBINATORICĂ ÎN CONTEXTE (studii de caz)

Marcel TELEUCĂ, doctor, conferenţiar universitar
Larisa SALI, doctor, conferenţiar universitar
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În articol sunt examinate modalități de tratare didactică a câtorva exemple care permit realizarea unor legături interdisciplinare în cadrul activităților matematice cu elevii capabili de performanțe înalte. În particular, sunt expuse situații de natură combinatorială ce descriu anumite tipuri de mișcare și poziționare spațială care se modelează cu ajutorul relațiilor de ordine în spațiu și timp.
Cuvinte cheie: educație matematică, interdisciplinaritate, combinatorică, mișcare.

Abstract. The article examines ways of didactic treatment of some examples that allow the realization of interdisciplinary connections in mathematical activities with capable of high performance students. In particular, situations of a combinatorial nature that describe certain types of movement and spatial positioning that are modeled using order relations in space and time are examened.
Keywords: mathematics education, interdisciplinarity, combinatorics, movement..

Introducere

Diferite studii au arătat că dexteritățile matematice elementare sunt legate de o sănătate mai bună la maturitate, acestea influențează luarea deciziilor zilnice, analiza problemelor și găsirea soluțiilor în baza datelor disponibile, lăsând la o parte emoțiile. Mai mult, familiarizarea cu calculele din copilărie ar putea influența obținerea unui loc de muncă mai bun în viitor. Cercetările au arătat că persoanele care sunt mai puțin pricepute la matematică sunt mai susceptibile de a fi șomeri pe termen lung și de a avea economii de pensionare mai puțin satisfăcătoare.

Matematica are frumusețea și rigoarea sa logică formală, dar este înțeleasă și ca instrument pentru practică în întreaga lume. Legile matematicii nu sunt percepute diferit în dependență de religie sau limba vorbită. Educația matematică posedă caracteristici multiple care o fac un instrument puternic pentru formarea abilităților esențiale pentru viață.

Abilitățile obținute prin rezolvarea problemelor de matematică ne pot ajuta să abordăm problemele din diverse domenii ale vieții. Deși mulți se plâng că matematica este plictisitoare sau complicată, adevărul este că o viață lipsită de matematică ar însemna să fii lipsit de posibilitatea de a pune în valoare experiența acumulată de omenire și să înțelegi lucrurile la un nivel mult mai puțin interesant decât ai fi putut.

Abordarea interdisciplinară

În sistemul educațional accentul interdisciplinaritate se pune uneori dintr-o convingere comună că disciplinele tradiționale nu sunt capabile sau nu doresc să abordeze o problemă importantă. Științele naturii și matematica au abordări diferite față de obiectele studiate, însă doar prin efort comun pot fi soluționate cu succes problemele formulate. Conceptul educațional STEM se bazează pe ideea de educare a elevilor și studenților, folosind o abordare multi-disciplinară și aplicată.

Construcțiile matematice de la sine nu au legătură cu proprietățile lumii înconjurătoare, ele sunt construcții pur logice, dobândind sens numai atunci când sunt aplicate sistemelor fizice reale. Martin Gardner considera că observarea, experimentul se realizează nu doar pentru a face lucrurile credibile, dar pentru a le explicita pentru înțelegere [1]. Această regulă fundamentală a făcut din el unul dintre cei mai de succes profesori și popularizatori ai științei în America.

În didactica matematicii pornind de la problemele pur matematice se purcede la compunerea de probleme cu caracter practic sau interdisciplinar urmărind scopul de a arăta aplicabilitatea modelelor matematice. M. Gardner scria [2], citându-l pe H. Dudeney, că, în lipsa unei liste bibliografice a cărților de matematică recreațională, entuziaștii pierd timpul în zadar compunând probleme (menționând că la acel moment era deja editată o asemenea lucrare [3]).

Integrarea ideilor din combinatorică în contexte

O abordare interdisciplinară a procesului de compunere a problemelor presupune, cel puțin, două surse care se completează reciproc (vezi Figura 1.).

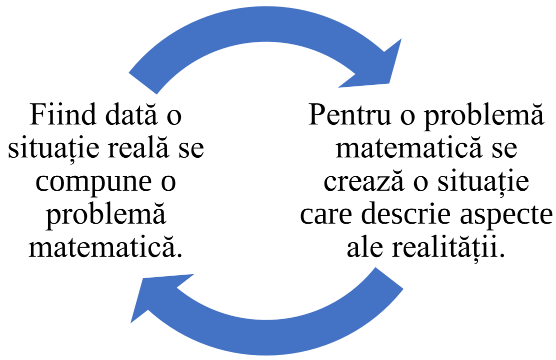

Figura 1. Compunerea problemelor legate de contexte reale

Compunerea de probleme este o activitate de o responsabilitate deosebită. La compunerea problemelor ce se referă la contexte din cotidian sau din domenii experimentale apar dificultăți care țin de specificul situației. Adesea cunoştințele de cultura generală nu sunt suficiente pentru a ține cont de toate aspectele. Nu este vorba de a interzice compunerea problemelor. Dar autorul va trebui să-și asume testarea enunțului într-un grup de rezolvitori competenți în aria curriculară căreia îi aparține contextul problemei. Vom exemplifica cele expuse mai sus prin exemple de natură combinatorică, care sunt ”îmbrăcate” în diverse contexte.

Exemplul 1. *Cinci bile identice sunt amplasate la anumite distanțe una de alta de-a lungul unei drepte orizontale. Ele se deplasează de la stânga spre dreapta. În întâmpinarea lor, de-a lungul aceleiași linii drepte, se deplasează alte 5 bile de la dreapta spre stânga. Vitezele bilelor sunt egale. La ciocnirea oricăror două bile, ele ricoșează și își schimbă sensul* *mișcării, iar viteza după ciocnire rămâne neschimbată. Câte ciocniri vor avea loc?* (Concursul ”*Tournament of the Towns”,* 2001 [4]).

Discuție: Se constată că ciocnirile au loc în ambele grupuri de bile în același mod. Situația descrie ciocnirea perfect elastică (fără pierdere de energie) dintre doua bile identice: după ciocnire bila a doua va prelua viteza bilei 1, iar bila 1 viteza bilei 2. Aparent bilele își schimbă identitatea.

Faptul că bilele se deplasează de-a lungul dreptei presupune că bilele de la extremități după ciocnire se vor deplasa fără a întâlni obstacole și nu vor mai reveni în ansamblul de 8 bile rămase.

Soluție. *Prima metodă*. Bilele de la extremități (cea mai din stânga și cea mai din dreapta) se vor ciocni câte o singură dată cu bilele de pe poziția a doua de la extremități: în total $2 \cdot 1 = 2$ ciocniri. Bilele de pe poziția a doua de la extremități se vor ciocni câte o dată cu bilele de la extremități și de câte două ori cu bilele de pe poziția a treia de la extremități: în total încă $2 \cdot 2 = 4$ ciocniri. Bilele de pe poziția a treia de la extremități se vor ciocni de câte două ori cu bilele de pe poziția a doua de la extremități și de câte trei ori cu bilele de pe poziția a patra de la extremități: în total încă $2 \cdot 3 = 6$ ciocniri.

Bilele de pe poziția a doua de la extremități se vor ciocni de câte trei ori cu bilele de pe poziția a treia de la extremități și de câte patru ori cu bilele de pe poziția a cincea de la extremități: în total încă $2 \cdot 4 = 8$ ciocniri. Bilele din mijloc se vor ciocni de câte patru ori cu bilele de pe poziția a patra de la extremități și de cinci ori între ele.

Atunci numărul total de ciocniri va fi: $2 + 4 + 6 + 8 + 5 = 25$.

Metoda a doua. Deoarece bilele nu-și schimbă viteza după ciocnire, ne putem imagina că după ciocnire bilele se străbat reciproc și își continuă mișcarea în același sens. Astfel, fiecare bilă care vine din stânga se va ciocni cu fiecare bilă din dreapta și vom avea în total $5 \cdot 5 = 25$ ciocniri.

O încercare de a compune o problemă care descrie o situație reală prin analogie poate crea o mulțime de confuzii și stârni întrebări cu caracter interdisciplinar. Iată un exemplu de problemă de acest gen identificată în surse internet.

Exemplul 2. *Zece vapoare navighează pe o linie est-vest. Cinci dintre ele pleacă din est spre vest, iar celelalte cinci pleacă din vest spre est. Cele zece vapoare navighează mereu cu o aceeași viteza constanta. Ori de câte ori două vapoare se întâlnesc, fiecare dintre ele face cale întoarsă și își continuă drumul în sensul contrar. Câte întâlniri între două vapoare au avut loc în total până la momentul când vapoarele au ajuns din nou în porturi?*

Discuție: Se constată că din start vapoarele se pot deplasa în întâmpinare sau în sensuri opuse. Șansa să se întâlnească pe suprafața globului pământesc există în ambele cazuri. Din enunț nu este clar dacă vapoarele sunt aranjate în rând sau în coloană.

În cazul aranjării în rând un număr maxim de întâlniri va avea loc atunci, când vapoarele care pornesc din același port au viteze diferite.

Se consideră oare întâlnire cazul când vapoarele trec unul în dreptul celuilalt, mişcându-se în sensuri opuse? Atunci când vapoarele sunt aranjate în rând și se deplasează cu viteze egale ele se vor întâlni simultan. În acest caz se consideră că are loc o singură întâlnire?

Cele mai multe întâlniri vor fi între vapoarele cu viteză mai mare, numărul de întâlniri este mai mic pentru vapoarele cu viteză mai mică.

Dacă V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 sunt vitezele vapoarelor care pornesc din est spre vest, iar U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 - vitezele vapoarelor care pornesc din vest spre est, ordonate descrescător, atunci, în dependență de coraportul dintre viteze, vapoarele care se deplasează în același sens ar putea să se ajungă unul pe altul. Va fi această întâlnire considerată la răspuns sau nu?

Dacă vapoarele sunt aranjate în coloană pe direcția est-vest la o anumită distanță și se deplasează cu viteze egale, atunci problema va fi similară problemei propuse la Turneul dintre orașe în anul 2001.

Exemplul 3. *La o activitate în grădiniță copii stau într-un rând drept cu fața spre educatoare. Aceasta dă comanda "la stânga". Copiii se întorc, care la stânga, care la dreapta. Dacă doi copii vecini se pomenesc față în față, ambii fac "stânga împrejur". Demonstrați că după un timp copii stau nemișcați* (Revista *Kvant* [5]).

Discuție: Sunt patru cazuri diverse privind poziționarea copiilor de la extremitățile rândului:

Cazul I: ambii copii s-au întors la stânga;

Cazul II: copilul din extremitatea stângă s-a întors la stânga, iar copilul din extremitatea dreaptă s-a întors la dreapta;

Cazul III: copilul din extremitatea stângă s-a întors la dreapta, iar copilul din extremitatea dreaptă s-a întors la stânga;

Cazul IV: ambii copii s-au întors la dreapta.

În cazul al III-lea copiii situați la capetele rândului vor rămâne nemișcați chiar după prima întoarcere. Cercetarea diferitor configurații de aranjare a copiilor conduce la constatarea faptului că în acest caz se vor stabili două secvențe ale șirului de copii: secvența din stânga - sunt întorși spre stânga, iar cea din dreapta – spre dreapta.

Încercarea de a considera diverse situații de aranjare în interiorul șirului de copii întâmpină multe obstacole și îndepărtează rezolvitorul de soluție.

Este eficient ca în loc să spunem ca doi copii care se trezesc fata în fata fac stânga împrejur, ne imaginăm ca ei îsi schimba locurile între ei fără a-și schimba direcția. În loc de doi copii care stau fata în fata vom avea doi copii care stau spate în spate. Acest mod de a vedea lucrurile nu schimba configurația aranjării copiilor ci, doar identitatea acestora, lucru neesențial, exact ca în problema 1. Privind astfel problema, este clar ca fiecare copil poate face doar un număr finit de pași, prin urmare numărul total de schimbări de poziție este și el finit.

Exemplul 4. *Un oraș este înconjurat de un zid circular. 12 gardieni deservesc zidul. La amiaza, fiecare gardian își părăsește postul și începe să patruleze într-o anumita direcție, cu* *o viteza cu care iar lua exact o ora ca să înconjoare întregul oraș. Când doi gardieni se întâlnesc, amândoi fac stânga-împrejur și încep imediat să patruleze, cu aceeași viteza, în direcția opusă. Arătați că la miezul nopții fiecare gardian se afla din nou la postul sau.*

Discuție: Dacă gardienii pornesc în acelaşi sens, ei nu se vor întâlni, dar fiecare va reveni la postul său peste fiecare oră, inclusiv peste 12 ore. Contează oare că posturile sunt amplasate uniform pe cercul zidului? Gardienii își vor schimba ordinea (consecutivitatea aranjării pe traseul circular)?

Soluție. Vom numerota gardienii și posturile în care sunt poziționați cu numerele 1 – 12. Vom demonstra că gardienii nu-și schimbă ordinea. Presupunem contrariul. La mişcarea în întâmpinare, în momentul întâlnirii, gardienii iau cale întoarsă, prin urmare, ei nu-și schimbă ordinea. Atunci constatăm că un gardian ar trebui să-l ajungă din urmă pe altul și să-l depășească. Aceasta nu este posibil, deoarece gardienii au viteze egale. Deci, gardienii nu-și schimbă ordinea aranjării de-a lungul zidului circular.

Considerăm că gardianul numărul 1 are o scrisoare care urmează a fi transmisă altui gardian în momentul întâlnirii. Atunci scrisoare va circula din mână în mână pe direcția de mişcare inițială a acestui gardian. Peste o oră scrisoarea va fi în mâna unui gardian care se va afla în acel moment în postul numărul 1. De asemenea, la acel moment în fiecare post se va afla câte un gardian, nu neapărat cel care era acolo la momentul inițial.

Fie că gardianul numărul 1 s-a deplasat într-o oră cu k posturi, adică a trecut în postul cu numărul k+1. Atunci gardianul numărul 2 va trece în postul cu numărul k+2, ş.a.m.d. Peste 2 ore gardianul numărul 1 se va afla în postul cu numărul 2k+1, gardianul numărul 2 va trece în postul cu numărul 2k+2, ş.a.m.d. Peste 12 ore gardianul numărul 1 se va afla în postul cu numărul 12k+1, gardianul numărul 2 va trece în postul cu numărul 12k+2, ş.a.m.d. Prin urmare, fiecare va reveni la postul său.

Putem mai întâi considera, pierzând din vedere identitatea gardienilor, ca atunci când doi gardieni se întâlnesc, ei își continua mersul în aceeași direcție. Atunci, după o ora, fiecare gardian va ajunge într-un anumit post, nu neapărat cel în care se afla inițial. Pe de alta parte, de asta data urmărind identitatea gardienilor, observam ca ordinea gardienilor pe zid nu se poate modifica. Astfel, daca după o ora un gardian a ajuns într-o poziție situată cu k posturi mai la dreapta în sensul acelor de ceasornic, atunci după cmmmc(12,k) fiecare gardian se va fi întors la propriul său post, deci după cel mult 12 ore fiecare gardian s-a întors la postul său inițial.

Exemplul 5. *Un ceas mecanic avea geamul spart. La orele 12:00:00 trei muște s-au așezat pe câte un segment reprezentat de acul orar, minutar, respectiv secundar al ceasului și au rămas așezate pe ele la aceeași distanta diferita de zero, de centrul discului determinat de cadranul ceasului. Când pozițiile oricăror doua ace indicatoare coincideau, cele 2 muște așezate pe ele treceau una în locul celeilalte. În cazul în care coincideau pozițiile la toate cele 3 ace indicatoare, doar muștele de pe acul orar și cel secundar își schimbau locul. Câte* *rotații complete de forma unui cerc imaginar generat de mișcarea acului pe care se afla, a efectuat fiecare musca până la ora 24:00:00? (Concursul ”Şcoala cu ceas”, 2011).*

Discuție: Acele ceasornicului se rotesc cu viteze constante, revenind periodic la poziția inițială în diferite intervale de timp. Se va întâmpla oare asta și cu muștele?

Soluție. Fie M_1 – musca care inițial se află pe acul secundar, M_2 – musca care inițial se află pe acul minutar, M_3 – musca care inițial se află pe acul orar. Pe parcursul mișcării distingem două situații în care muștele schimbă cu locurile: 1) se suprapun două ace; 2) se suprapun trei ace. În decursul celor 12 ore orarul face un tur, minutarul 12 ture, iar secundarul 720 de ture. În total muștele fac 733 de ture.

Fie că musca M_i se apropie de M_j, aflându-se pe un ac mai rapid decât musca M_j. Evident că cea de a treia muscă, M_k nu este între muștele M_i și M_j pe direcția mișcării. (Considerăm direcția conform mișcării acelor ceasornicului.) Inițial putem avea poziționarea M_k, M_i, M_j sau M_i, M_j, M_k. După suprapunerea acelor pe care erau muștele M_i și M_j, în primul caz vom avea ordinea M_k, M_j, M_i, iar în cel de al doilea – M_j, M_i, M_k. Musca M_k rămâne nemișcată.

Din ipoteză avem că, dacă toate acele se suprapun, adică se întâlnesc toate muștele, musca care se află pe acul secundar în acel moment și musca care se află pe acul orar se schimbă cu locurile, iar musca de pe minutar rămâne nemișcată. Deci, oricare două muște ar fi examinate, ele sau efectuează număr egal de rotații sau una va face cu o rotație mai mult.

Să privim iarăși ce se întâmplă când o muscă ajunge din urmă o alta muscă. Ordinea acelor se schimbă, dar cea a muștelor - nu: musca M_2 rămâne mereu în urma muștei M_1. Asta înseamnă că între muște nu exista depășiri: mai întâi încheie o tură musca aflată inițial pe secundar, apoi termină tura musca aflată inițial pe minutar, apoi termină o primă tură și musca aflată inițial pe orar. Urmează iarăși prima muscă, a doua muscă, a treia muscă, etc. În final, prima muscă va face 245 de ture, a doua muscă 244 de ture, iar ultima muscă tot 244 de ture.

Concluzii și recomandări pentru cadre didactice: - Să compună cu grijă probleme cu caracter aplicativ; - Să ofere elevilor timp pentru a trece prin ”zbuciumul” căutării soluției; - Să descopere împreună cu copii situații care necesită declanșarea fenomenului ”insight”; - Să testeze modelele focusându-și atenția pe aspecte neevidente ale funcționării acestuia.

Bibliografie

1. Gardner M. Entertaining Science Experiments with Everyday Objects. 1981
2. Gardner M. Mathematical puzzles and diversions. University of Chigaco Press, 1988
3. Schaal W.L. Recreational mathematics, 3d rev.ed., 1963
4. Surse: http://www.problems.ru/view_by_source_new.php?parent=187098&start=0
5. Surse: http://kvant.mccme.ru/