

## EDUCAȚIE METEMATICĂ PRIN PROBLEME NONSTANDARD

Andrei HARITON, dr., profesor universitar, UST

Laurențiu CALMUȚCHI, dr. hab., profesor universitar, UST

Laurențiu ȚIBREA, IȘJ Vrancea, CCD Focșani, România

**Rezumat.** Problemele non-standard sau insight sunt considerate astfel de probleme, pentru care în școala de matematică nu sunt descrise reguli generale, anumite proceduri sau metode de rezolvare a acestora, care ar putea determina fără echivoc o metodologie pentru determinarea modului de rezolvare a acestora, precum și realizarea fiecărei etape logice a algoritmului lor de rezolvare.

**Cuvinte cheie:** probleme non-standard, educație matematică, motivație, creativitate, inventivitate.

**Abstract.** Non-standard or insight problems are considered such problems, for which in the school of mathematics are not described general rules, certain procedures or methods of solving them, which could unequivocally determine a methodology for determining the way to solve them, as well as the realization of each logical step of their solving algorithm.

**Keywords:** nonstandard problems, mathematics education, motivation, initiative, creativity, inventiveness.

Fără a pretinde la o expunere completă a cercetărilor în acest domeniu, avem să încercăm pe scurt a reda o mică cărăruie spre această lume miraculoasă a problemelor de perspicacitate pentru a evidenția pe cât este posibil de clar viabilitatea și variabilitatea formelor lor pedagogice, locul lor în sistemul general al exercițiilor care dezvoltă motivația și inițiativa de a studia matematica. Apariția acestui tip de probleme are rădăcini încă în matematica orală, apărută înainte de apariția scrisului. Curiozitatea nesecată a minții omului cugetător, setea activității mintale și interesul față de un fapt neordinar, curios și imprevizibil, precum și puterea fantastică a influenței pedagogice, caracteristică problemelor de perspicacitate, a și determinat viabilitatea lor.

Într-adevăr marea parte dintre unele probleme a colecției problemelor matematice de perspicacitate s-au adeverit a fi destul de viabile, trecând de la o generație de oameni curioși la altă generație în forma lor primar-inițială sau în variante destul de ușor de a fi recunoscute. Prin concursul a multor personalități dotate, unele dintre aceste probleme au fost dezlegate ca fiind cele mai sofisticate probleme non standard, devenind mare bătaie de cap pentru mulți pe un timp, adeseori, nedeterminat, se conturau niște jocuri matematice bine fundamentate logic și au căpătat multe rezolvări exhaustive. Și dacă, în urma soluționării lor, unele din ele pierdeau din farmecul lor inițial de problemă de perspicacitate sau joc matematic și ca urmare au ieșit din colecția a astfel de probleme, atunci altele, dimpotrivă, doar au căpătat acea finețe picantă și de sens nou, care o transformă într-o regulă generală, devenind uneori teoreme cu astfel de demonstrații originale, că nu este fără folos și a se clarifica în subtilitățile ei, iar poate și chiar a încerca de a mai descoperi ceva de unul singur.

Această colecție colectivă de probleme de perspicacitate a fost creată prin concursul a unui număr imens de oameni: matematicieni, adeseori savanți cu renume, pedagogi, amatori.

În istoria matematicii este cunoscut faptul că preotul iezuit englez Albinus Flacus Alcuin (Ahl-win) din ordinul „*Prietenii Templului*” a creat și condus Școala Palatină – școală de nivel înalt pe lângă curtea Regelui Franței Carol cel Mare (la mănăstirea Torus) și multe alte școli mai elementare ca Școala Palatină în anii 780-804, fiind prototipul bazelor generale a învățământului din Europa Apuseană, era un mare pasionat de probleme de perspicacitate, majoritatea lor fiind sub formă de ghicitori și glume. El a scris o lucrare excelentă: „*Carte pentru ascuțirea agerimii tinerimii*” – în formă dialogată (catehetică – întrebări și răspunsuri) în care pentru prima oară în istoria matematicii este atestată problema pelasgilor – civilizațiilor de păstori despre țăranul care avea de trecut peste râu: capra, varza și lupul, problema ogarului care urmărește vulpea etc. Cartea s-a bucurat de mare faimă fiind întrebată în Europa până către secolul al XVII-lea, inclusiv și în țările române. Preotul iezuit este urmat de o pleiadă întreagă de matematicieni pasionați de probleme nonstandard. Printre ei atestăm matematicieni eminenți ca: Leonardo Fibonacci, Bachet de Meziriac, Pierre Fermat, Gotfrig Leibnitz, Leonard Euler, Carl Gauss, Wiliam Hamilton, M. Gardner ș.a., la ruși s-au evidențiat: Leontii Magnițki, V.I. Obreimov, I. Perelman, E.I. Ignatiev, P. Sorokin ș.a., în Moldova: A. Hariton, V. Plângău, I. Achiri, I. Leahu ș.a., în România: V. Rădulescu, I. Barbu ș.a.

Astăzi literatura de acest gen cuprinde probleme de logică, de perspicacitate. Multe dintre ele circulă prin lume pe cale orală, deoarece fiecare personalitate inteligentă se simte îndemnat să le memorizeze, pentru a le transmite și altora, de fiecare dată, adăugând ceva nou de la sine, dacă este capabil de atare posibilitate, astfel făcând o oarecare adaptare la timpul dat sau fiind o oarecare invenție creativă personală. Procesul creării lor este perpetuu și în ascensiune.

Viața cotidiană dictează omului modern legitățile sale evolutive prin probleme de majoră importanță implicate de transformările ce au loc în toate domeniile de activitate profesională. Problemele cu care se confruntă oamenii, adeseori îi situează în postura unei alegeri destul de complicate. Școala este chemată să asigure un nivel corespunzător adecvat cerințelor înaintate prin perfectarea modalităților de predare-învățare cât mai profundă și accesibilă a bazelor științelor, inclusiv și matematici, să le dezvolte competențe creatoare și deprinderi de muncă intelectuală, să le altoiască dorința și setea de a acumula cunoștințe de sine stătător și de a aprofunda cunoștințele căpătate anterior. A educa la elevi capacitatea de a găsi cele mai optimale căi de selectare ajută studierea modalităților de determinare a posibilităților de soluționare a problemelor non standard sau probleme de perspicacitate, iar învățătorului de a dezvolta la elevi o memorie plastică și iscoditoare, a-i învăța să poată determina cele mai raționale procedee și căi de soluționare a situațiilor non standard – probleme destul de dificile nu numai pentru elevi, dar uneori și pentru învățători. Aceste probleme se caracterizează prin faptul că nu există procedee standard de soluționare a lor, ci fiecare din aceste probleme necesită o modalitate specifică, caracteristică, doar pentru această problemă, de a-i găsi calea ei de soluționare, unica în felul ei. Fiecare problemă are calea ei unică de soluționare. Matematica este acel obiect de studiu școlar care acumulează în sine

cele mai importante procese ale activităților educaționale, ca: analiza și sinteza, inducția și deducția, compararea și analogia, generalizarea, clasificarea, abstractizarea și idealizarea. Sarcinile de tip logic, euristic, combinatoric vor ajuta elevii a se orienta corect în posibilitatea de a descompune orice problemă în elementele fundamentale constituante, a le contrapune, a determina cele mai raționale procedee de soluționare a situațiilor de problemă non standard, a face concluziile de rigoare și deducțiile cuvenite.

Există o serie de probleme ce pot fi rezolvate prin încercări, prin *metoda probelor și erorilor*. Se mai numesc probleme de estimări. În rezolvarea problemelor de acest tip se utilizează uneori o singură ipoteză asupra unei mărimi și apoi se examinează diferențele apărute între rezultatul căutat și cel presupus. Alteori se verifică o serie de valori presupuse. Demersul logic nu depinde de presupunerea înaintată, ci de modalitatea de a determina legăturile existente dintre mărimile proporționale care figurează în legenda enunțului problemei puse în discuție. Se va realiza o discuție euristică în cadrul căreia se vor determina parametrii care trebuie să mărginească aria de căutare și se va apropia cât mai aproape de soluția căutată. E bine de a rezolva problema prin mai multe variante, pentru a demonstra impecabilitatea strategiei didactice euristice înaintate la moment și corectitudinea rezolvării problemei date prin metoda falselor presupuneri. Se determină soluția corectă prin verificarea valorii de adevăr a propoziției cercetate. Anume astfel arată calea soluționării problemelor din această categorie, cale indicată de eminentul pedagog D. Polya, care menționează: „*Desigur, ne vom învăța a rezolva și demonstra, însă la fel ne vom învăța și a presupune, a ghici*”. De exemplu: problema: „*O sută de găște*” (Problemă atestată în creația celor mai variate civilizații în diferite moduri de exprimare. În cazul dat problema este selectată din folclorul rus)

**Problemă:** Zboară un stol de găște. Înaintea lor apare un gânsac, care le spune: „- *Buna ziua o sută de găște!*” La care una dintre ele răspunde: „- *Noi nu suntem 100, iată dacă am mai fi încă ca pe atâtea câte suntem, încă jumătate, încă un sfert și apoi încă și tu, atunci am fi o sută de găște*”. Câte găște zburau în stol?

În popor se utilizează, ca mijloc de educație intelectuală populară, forme de raționament logic ca probleme-glumă, probleme-ghicitori sau probleme populare. Aceste probleme puteau fi auzite des la clăci, șezători și alte ocazii, când se aduna multă lume, mai ales tineretul, constituind uneori tematica unor adevărate serate de istețime și de cugetare logică. Uneori, astfel de probleme se prezintă ca simple exerciții de calcul matematic, doar că condițiile problemei poartă o formă amuzantă, care cer pentru soluționarea ei de creat o modalitate specifică de cugetare.

Probleme de tip joc conțin o formă logică ritmică apreciată de mentalitatea copiilor sau acelorora cărora le este dedicată. Soluția ei adeseori reiese din pașii logici, fără a efectua un anumit efort mintal sau anumite calcule complicate. De exemplu problema de tipul:

*Dacă fiecă Tamară  
ar lua din coș o pară,*

*ar rămâne-n coș o pară.*

*Câte două o Tamară*

*n-o să ia nici o pară.*

În enunțul *problemelor logice aplicative* se întâlnește o întrebare aplicativă-practică indicată prin concursul a unor legături logice destul de complicate. Pentru a rezolva problema este necesar de a efectua unele încercări practice sau de a avea anumite deprinderi practice, anumite abilități de a ne sustrage la moment de la toate caracteristicile mai puțin esențiale și de pregătit fundamentul logic al discuției euristice bazate pe caracteristica mai importantă, de construit planul logic de rezolvare a problemei alcătuit anume doar în conformitate cu această caracteristică. Aceste probleme solicită rezolvitorilor un anumit efort mental de tip practic-aplicativ. De exemplu:

1. *Dimineața eu mi-am pregătit un pahar de cafea. Când am dus paharul la gură, a venit mama cu ulciorul cu lapte. După ce am băut a șasea parte din pahar, mama a împlut paharul cu lapte. Eu am băut a treia parte, mama iarăși l-a împlut cu lapte. Am mai băut încă jumătate din paharul plin, mama iarăși l-a împlut cu lapte. Am băut paharul până la fund. Ce am băut mai mult: lapte sau cafea?*

2. *Un moș care păștea oile a fost întrebat câte oi are în turmă și dacă are 100 de oi. La care moșul răspunde: „Dacă aș avea aceste oi ce le am peste sută, atunci vor fi întocmai de nouă ori câte nu-mi ajung până la sută”. Câte oi păștea baciul?*

3. *În Moldova fiecare al cincilea bărbat este numit Ion, iar fiecare al zecelea este numit Vasile. Care-s mai mulți: al-de Ion a lui Vasile sau al-de Vasile a lui Ion?*

Problemele de tipul *probleme recreative* se mai numesc probleme de perspicacitate și ingeniozitate, probleme-glumă, sarcini enigmatice, probleme: de logică, de căutare a unei legi, de ordonare într-un șir, probleme-rebusuri, pătrate magice. Problemele recreative trezesc adesea un viu interes față de matematică, care este o condiție prioritară pentru o însușire conștientă a conținuturilor de învățare și de memorare eficientă și fundamentală a celor învățate. Adeseori, ele contribuie destul de substanțial și eficient în procesul educării dragostei față de matematică. Aceste probleme înviorează starea de lucru în cadrul celor mai abstracte teme de învățare, fac ca asimilarea conținuturilor să se facă mai lejer și clar. Ele dezvoltă modalitatea de a diversifica și lărgi frontierele cugetării.

Printre aceste probleme pot fi:

**Probleme-glumă și sarcini enigmatice**, care pot fi rezolvate oral sau în scris:

1. *Pe un copac erau 6 păsări. Un vânător a împușcat una din ele. Câte păsări au rămas pe copac?*

2. *Cum din 3 chibrituri, fără a le rupe, de obținut 4?*

**Probleme-rebusuri.** Rebusul constituie o enigmă, conținutul căreia redă cu ajutorul a diferitor indici: desene, litere, semne, cifre etc.:



a), + **U** și se citește „UNU”;



b) **N = I** și se citește „TREI”.

În matematică se rezolvă și rebusuri pur matematice, în care se cere de determinat sau de reconstituit cifrele sau numerele într-o anumită operație matematică. De exemplu,

$$\text{a) } \begin{array}{r} + \quad B \quad D \quad C \quad E \\ \hline \quad B \quad D \quad A \quad E \\ A \quad E \quad C \quad B \quad E \end{array},$$

$$\text{b) } \begin{array}{r} - \quad * \quad 6 \quad 3 \quad * \\ \hline \quad 2 \quad 5 \quad * \quad 6 \\ 1 \quad * \quad 5 \quad 4 \end{array}.$$

Personalitatea în creștere, lucrând independent asupra rezolvării unei probleme de perspicacitate în căutarea soluției necunoscute lui (*fie că este poate și o problemă pe care alții demult au rezolvat-o*) realizează un proces de creativitate elementară individuală. Punctul lui de pornire în acest proces de cugetare este o *inducție* simplă, adică trecerea de la un șir de cazuri particulare concrete spre o stare ce cuprinde o altă concretizare mai superioară sau generalizarea lor – o totalizare. Totalizarea, în procesul de soluționare a problemelor, se realizează și cu ajutorul sau prin intermediul *inducției complete*. Concluzia, obținută pe o astfel de cale este deja o *deducție logică*.

Stimulentul fundamental spre o muncă intelectuală este *interesul*, inițial fiind exprimat ca o parte derivată de la impresia care a făcut-o textul legendei problemei, iar mai apoi deja ca o dorință a procesului cunoașterii. El trezește o dorință de a rezolva problema, care îl atrage pe rezolvitor în sfera activității intelectuale active, captivante, care la rândul ei, contribuie la fortificarea tăriei de caracter și a insistenței, apoi a unui nivel mult mai superior al inteligenței. În baza interesului apare *pasiunea* de a rezolva probleme și de a studia matematica. Adevărata *atractivitate* a conținutului textului legendei problemei este orientată spre a atrage atenția, pentru a activa gândirea și cugetarea logică, de a trezi interesul față de matematică și dorința de a se ocupa de aceasta. O *atractivitate* veritabilă întotdeauna poartă în sine particularități de ingeniozitate sau stare de spirit inventiv și atribuie problemelor o nuanță de joc sau mister pasionant. Prin *atractivitate* în conștiința rezolvitorului pătrunde senzația misticului în matematică, care în procesul ulterior de studiere a matematicii se completează cu sesizarea frumosului și a farmecului. La elementele estetice ale *atractivității* putem referi: umorul ușor al legendei, o imprevizibilitate a situației sau a deznodământului neașteptat care apare din procesul de soluționare a problemei, armonia formei geometrice de modelare, finețea soluției, sub care se subînțelege îmbinarea simplității și a originalității metodelor de căpătare a ei. Procesul dezvoltării esenței creativității la elevi depinde de fiecare profesor aparte. Competența de a soluționa probleme matematice non standard necesită de a avea un sistem

bine format și ordonat de cunoștințe cu elemente de creativitate. Această calitate este considerată unul dintre criteriile educației matematice formate ale unei personalități bine instruite intelectual, anume așa cum propune W. Blasch: „*Sârguința, adeseori, nu ne ajunge, din păcate trebuie ceva mai mult, o idee năstrușnică*”.

Pentru a rezolva cu succes probleme de perspicacitate trebuie de format competențe de a trece de la un sistem de cunoștințe la altul, asociații care se formează doar pe parcursul soluționării problemelor ne tipice. Doar o muncă sistematizată în privința formării și dezvoltării asociațiilor între sistemele de cunoștințe pot forma premise pentru a facilita formarea acestor legături și a le face cât mai trainice și accesibile, totodată este și unul dintre cele mai importante procese ale dezvoltării intelectuale matematice multilaterale. Din acest punct de vedere este important ca enunțurile problemelor matematice ce le propunem elevilor să conțină legături între cele mai variate compartimente ale cursului matematicii școlare.

Acestea sunt cerințele psihologice, îndeplinirea cărora facilitează procesul educării matematice ale elevului. Profesorul, firește, trebuie să țină cont de acestea în practica de organizare a muncii elevului în cadrul activităților la ore, la îndeplinirea temei de acasă, în organizarea activităților extrașcolare și a orelor de odihnă intelectuală a lor.

## **Bibliografie**

1. Евсюк С.Л. Решение задач повышенной сложности. Минск: Мисанта, 2003. 224 стр.
2. Колягин Ю.М., Оганесян В.А. Учись решать задачи. Москва: Просвещение, 1980. 96 стр.
3. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе математики 4-5 классов. Москва: Просвещение, 1986. 96 стр.
4. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи. Москва: Просвещение, 1989. 192 стр.