CZU: 372.851

SOFISMELE – PROCEDEU VERIDIC DE FORMARE A COMPETENȚELOR MATEMATICE

Laurențiu CALMUȚCHI, dr. hab., prof. univ., UST
Ionel TATARU, IȘJ Vrancea, România
Laurențiu ȚIBREA, CCD Vidra, CCD Focșani, România

Rezumat. Sofismul este o concluzie premeditată extrasă cu o eroare ascunsă destul de inteligentă, care are vizibilitatea, la prima vedere, că este construită corect logic. A depista eroarea comisă în raționamentul logic prezentat, care, nu întotdeauna este simplu, clar și ușor de executat este o artă matematică.
Cuvinte cheie: sofism matematic, educație matematică, raționament matematic, logică matematică, afirmație matematică, abilități matematice.

Abstract. Sophism is a premeditated conclusion drawn with a rather clever hidden error, which has a visibility, at first sight, that it is constructed correctly logically. As sophism would not have been constructed, it necessarily contains one or more well-camouflaged logical errors.
Keywords: mathematical sophistry, mathematics education, grounded mathematical reasoning, mathematical logic, mathematical statement, mathematical skills.

Sofismul se consideră un raționament premeditat logic incorect care poartă haina unui raționament „*impecabil de corect*”. Sofismul matematic este o modalitate de educație pur matematică, un exercițiu de o logică impecabilă de aplicare a unor greșeli eronate în raționamentele matematice, când rezultatul este evident fals, însă eroarea comisă, ce duce la un astfel de rezultat, este extraordinar de bine camuflată. Cel care nu cunoaște fundamental regulile matematice adeseori cade în încurcătură deoarece greșeala comisă nu este clar evidentă și din această concluzie se scoate la iveală un „*adevăr*” oarecare, care deseori este o eroare matematică într-o operație, aparent corectă. Așa cum, în sofismele matematice sunt ascunse operații matematice interzise conform rigorii matematice sau nu se respectă anumite condiții de aplicare corectă a unor reguli, formule sau teoreme. A depista eroarea comisă în raționamentul logic prezentat, care, nu întotdeauna este simplu, clar și ușor de executat este o artă matematică.

„*Sofism*” este un cuvânt de origine greacă, ce în traducere înseamnă șaradă, invenție ingenioasă. Denumirea provine de la Sofia – zeița înțelepciunii. Sofiștii constituiau o tagmă separată a oamenilor intelectuali, care practicau întreceri la soluționarea a astfel de sarcini didactice între oamenii competenți în acest domeniu, în mod public. Cel mai important sofist al antichității pe nume Esop, considerat robul unui „*deștept*” grec, care se folosea de serviciile lui, prin care Esop la un oarecare timp și-a obținut libertatea.

Eminentul matematician grec Euclide (*sec. III î.e.n.*), în afară de ilustra sa operă „*Elementele*” a mai scris și altă carte fascinantă „*Pseudoaria*” – o diversitate de raționamente eronate, pe care le poate face un tânăr, care începe a se descurca în lumea matematicii și, în special, în geometrie. O importantă și de neîntrecut artă și antrenare a unui debutant în fascinanta şi deloc nu uşoară artă de a raționa, de a calcula (*de unul singur*), unde este ascunsă eroarea în raționamentul dat și pe care se bazează dezorientarea logică. Această operă nu a ajuns până în zilele noastre. Majoritatea matematicienilor eminenți și-au adus aportul la extinderea compunerii şi aplicării sofismelor matematice, printre care: Arhimede, Fermat, Viette, frații Bernoulli, Euler, Boltzano, Leibnitz ş.a. Elucidarea greşelilor în raționamentele matematice deseori contribuie la formarea celor mai fundamentate competențe de aplicare a cunoştințelor acumulate în practică. În această ordine de idei este bine de a cunoaște istoria multor cazuri povățuitoare, ca de exemplu: istoria axiomei lui Euclid (*Postulatul V*) cu referire la dreptele paralele.

Rolul sofismelor în evoluția matematicii este asemenea cu rolul, jucat de greșelile speciale strecurate în „*demonstrațiile matematice*" propuse. Chiar și Ivan Pavlov (*fiziolog rus de reputație mondială*) spunea: „*O eroare corect sesizată – este o cale spre noi descoperiri*." Desigur, clarificarea erorilor în cugetările matematice adeseori au contribuit la evoluția ulterioară a matematicii. Cercetarea și discuția sofismelor matematice dezvoltă gândirea logică, adică altoieşte competenţele necesare în activitatea cotidiană de a cugeta corect. A depista eroarea în sofism, înseamnă a o conştientiza, iar conştientizarea greşelii, preîntâmpină repetarea ei în activitățile practice și cugetările logice ulterioare. Tot odată, rezolvarea sofismelor este un proces captivant. Cu cât sofismul este mai complicat, cu atât rezolvarea lui aduce mai multe satisfacții în care pot fi descoperite proprietăţi surprinzătoare – pe cât de simple, pe atât de fermecătoare – ale unor concepte, relații sau operații matematice. Motivul pentru care am fost îndemnați să le prezentăm este adevărul că gândirea creatoare care se dăruiește unor astfel de subiecte este de aceeași natură cu tipul de gândire care conduce la descoperirea matematică, științifică – această inițiere în descoperire fiind un deziderat meritoriu înscris în sarcinile școlii de azi.

Întrebarea care însoțește orice sofism este de tipul: „*Cine poate lămuri unde este comisă greșeala?*"

Practica predării-învățării-evaluării matematicii arată, că posibilitățile aplicării raționale a sofismelor matematice sporesc pe măsură ce elevii avansează spre un studiu cât mai serios al matematicii gimnaziale, apoi și cele liceale. Organizarea competentă a rezolvării sofismelor contribuie la formarea unei baze logice bine fundamentate de cunoştinţe, care vor fi un bun spor pentru soluționarea lor în clasele liceale, în cadrul cărora predomină metodele axiomatice-deductive de predare-învățare-evaluare a matematicii. Așa cum cunoştințele matematice ale elevilor claselor a V-a a VI-a nu sunt încă ample, atunci și sofismele matematice propuse unui astfel de contigent trebuie să fie unul adecvat. Astfel, în cadrul ședințelor cercului la matematică elevii pot fi familiarizați cu sofismele matematice simple, bazate pe încălcarea regulilor operațiilor matematice cunoscute. Ținând cont de faptul, că elevii claselor V-VI sunt predispuși de a reacționa emoțional la absurditatea afirmațiilor, trăinicia calității însușirii cunoştințelor matematice sporește considerabil. Din punct de vedere didactic-pedagogic sofismele matematice trebuie folosite nu atât pentru prevenirea greşelilor, cât pentru a ține sub control, modalitatea cât de conștient însușesc elevii materia de studiu, care greșeli sunt comise cel mai frecvent și cum de reparat aceste erori la timp. Este necesar de a începe cu cele mai simple sofisme, accesibile pentru elevi, complicând treptat complicitatea lor, pe măsură ce elevii acumulează cunoștințe matematice. Este util ca profesorul să propună elevilor de a alcătui în baza sofismului rezolvat, un alt sofism asemănător cu cel rezolvat.

În practica predării-învățării-evaluării matematicii în clasele *3-6* se practică sarcini didactice sub formă de situații de problemă, practici de soluționare a unor probleme deja rezolvare sau demonstrate prin niște raționamente logice, în care asistă, într-un mod nemijlocit, o eroare, destul de bine camuflată – eroare care duce la concluzii destul de eronate. În aceste enunțuri, adeseori este încălcată o lege/regulă matematică/logică, un procedeu practic matematic, care în anumite condiții se poate realiza, însă în caz general este completamente greșit sau poate inadmisibilă. Studierea, cercetarea și discutarea lor multilaterală, precum și soluționarea acestor situații dezvoltă la elevi competențe fundamentale, spirit de observare, modalitatea unei cugetări logice și coerente, scrierea unui răspuns bine chibzuit și afirmativ just. B. Breht afirma, că „*persoana pentru care faptul că $2\times2 = 4$ e de la sine înțeles nu va deveni nici odată un mare matematician*”. Iată câteva sofisme elementare:

1. $\boldsymbol{4\times4 = 25.}$

Depistați eroarea comisă în următorul „*raționament logic*”: „*Patru ori patru fac douăzeci și cinci*”.

Din identitatea evidentă: $16:16 = 25:25$, după ce în fiecare parte a ei a fost scos factorul comun din paranteze, avem: $16(1:1) = 25(1:1)$. Este cunoscut că $1:1 = 1$ și aplicând acest adevăr în ultima egalitate, obținem: $16 = 25$, de unde avem: $4\times4 = 25$.

2. ***Y lei = 10000 bani.***

Depistați eroarea comisă în următoarea „*demonstrație*”: *Y lei = 10000 bani.* Avem identitățile logice: *Y lei = 100 bani* și *1 leu = 100 bani.* Din proprietățile operațiilor asupra egalităților este cunoscut, că ele pot fi înmulțite parte cu parte. Aplicând această afirmație la egalitățile/identitățile date mai sus, se obține o identitate nouă: *Y lei = 10000 bani,* ceea ce este destul de clar oricui că nu este adevărat, deoarece în loc de *Y* poate fi scris orice număr. Unde s-a strecurat eroarea?

3. $\boldsymbol{2\times2 = 5.}$ *(varianta I)*

Rezolvăm ecuația: $5x - 25 + 20 = 4x$, $5x - 25 = 4x - 20$, $5(x - 5) = 4(x - 5)$. Împărțim ambele părți la $(x - 5)$. De unde avem: $5 = 4$ sau $2\times2 = 5$. Unde este greșeala?

4. $\boldsymbol{7 = 9.}$

Fie dată egalitatea adevărată: $(2 - 3)^2 = (6 - 5)^2$. De aici $2 - 3 = 6 - 5$ sau $2 + 5 = 6 + 3$. Prin urmare: $7 = 9$. Unde este greșeala?

În studierea matematicii la compartimentul algebră prin raționamente, numite sofisme algebrice, sunt prezente erori efectuate în procesul transformărilor asupra fracțiilor, expresiilor, rădăcinilor de ordin par și puterilor cu exponent par etc. Asemenea erori conțin în sine unele formulări, care în caz general nu pot fi admisibile, însă în anumite cazuri particulare au sens logic adevărat. Iată câteva sofisme din compartimentul algebric:

1. ***a = 1/2×a.*** Acest sofism urmărește scopul de a demonstra, că orice număr $a \in N$ este egal cu jumătatea lui. Considerăm două numere naturale, egale între ele *a = b*. Înmulțim ambele părți ale acestei egalități cu *a* și din ambele părți scădem b^2. Obținem $a^2 - b^2 = ab - b^2$ sau (*a* – *b*)×(*a* + *b*) = *b(a – b).* Împărțind ambele părți la (*a* – *b*), obținem *a* + *b* = *b.* Așa cum *a* = *b,* avem: *a* + *a* = *a,* sau *2a* = *a.* Din aceste se obține: *a* = *1/2×a.* Unde este greșeala?

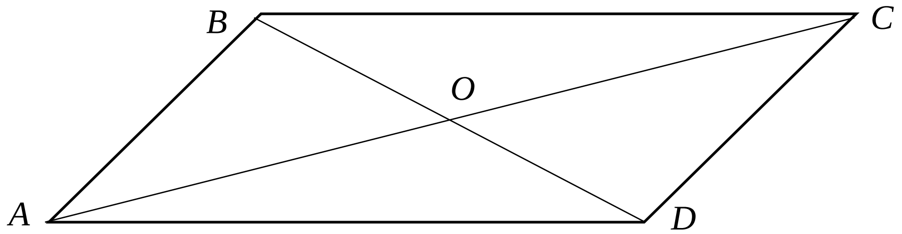
2. ***1 ≠ 1:*** Din proporția *a/b = c/d* obținem egalitatea: *a/b = (a – c)/(b – d) = c/d,* deoarece în ambele cazuri are loc proprietatea fundamentală a proporției: *ad* = *bc.* Fie *x* astfel, încât are loc egalitatea $\frac{3x-b}{3x-5b} = \frac{3a-4b}{3a-8b}$. Aplicând regula de mai sus, obținem $\frac{3a-4b}{3a-8b} = \frac{3x-3a+3b}{3x-3a+3b}$. În partea dreaptă am obținut o expresie egală cu unu, iar în partea stângă – fracția, diferită de unu. Deci „am demonstrat”, că *1 ≠ 1.* Unde-i greșeala?

3. ***4 = 8.*** Să luăm sistemul de ecuații: $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ x - 2 = -\frac{y}{2} \end{cases}$. Rezolvăm sistemul prin metoda substituției. Obținem: *4 – y + y = 8,* adică: *4 = 8.* Cum așa?

În studierea matematicii la compartimentul geometrie pot fi aplicate diverse sofisme – perle a ale cugetării, care după părerea lui Lewis Carroll: „*Nici 30 de ani, nici 30 de secole nu pot influența deloc claritatea și frumusețea adevărurilor geometrice.”*

1. ***Orice paralelogram este dreptunghi.***

În acest scop este suficient să demonstrăm, că orice paralelogram are diagonalele congruente. Este știut, că, într-adevăr, în orice paralelogram suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor diagonalelor. Deci în paralelogramul *ABCD* vom avea egalitatea:



$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2$, iar așa cum $|AB| = |CD|$ și $|BC| = |AD|$ *(ca laturi opuse într-un paralelogram),* avem: $2(|AB|^2 + |BC|^2) = |AC|^2 + |BD|^2$ *(1).* Din teorema lui Ptolomeu avem: $|AB|\times|CD| + |BC|\times|AD| = |AC|\times|BD|$ sau $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|\times|BD|$ *(2).* Înmulțim cu *2* relația *(2)* și scădem egalitatea obținută din *(1).* Determinăm: $0 = |AC|^2 + |BD|^2 - 2|AC|\times|BD| = (|AC| - |BD|)^2$, de unde $|AC| - |BD| = 0$ sau $|AC| = |BD|$. *c.t.d.* Unde este greșeala? (R: Teorema lui Ptolomeu are loc la patrulaterele înscrise în cerc, iar paralelogramului nu i se poate circumscrie un cerc)

La compartimentul combinatorica pot fi utilizate sofismele:

1. ***Toate numerele sunt egale între ele.***

Fie $a < b$ două numere arbitrare diferite între ele. Atunci, avem:

$$(a-b)^{2m} = a^{2m} - 2ma^{2m-1}b + \frac{2m(2m-1)}{1\times 2}a^{2m-2}b^2 - ... + \frac{2m(2m-1)}{1\times 2}a^2b^{2m-2} - 2mab + b^{2m}.$$

Fie $m = \frac{1}{2}$. Obținem: $(a - b) = a - b + 0 + ... + 0 - a + b$ sau $a - b = 0$. Deci, am obținut: $a = b$. Așa cum numerele a și b au fost selectate arbitrar, am obținut, că oricare două numere sunt egale între ele. Unde este greșeala?

2. ***1 = 0 = 1/2.***

Se știe, că $(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times 2\times 3\times 4}a^{n-4}b^4 + ... + b^n$. Fie $a = b = 1$ și $n = -1$. De aici, $(1 + 1)^{-1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ Dar dacă numărul termenilor în partea dreaptă este par, atunci avem: $\frac{1}{2} = 0$. Dar, însă, dacă numărul termenilor în partea dreaptă este impar, atunci avem: $\frac{1}{2} = 1$. Deci, am obținut: $1 = 0 = \frac{1}{2}$. Oare nu este absurd rezultatul obținut? Da! Este cam absurd. Dar, totuși, unde s-a comis eroarea? (R: Pentru $m = 1/2$ vom avea $(a-b)^{2m} = (a-b)^{2\times\frac{1}{2}} = (a-b)^1 = a - b$. Deci, aplicarea formulei este nelegitimă. Aplicând formula, nu s-a ținut cont de faptul, că descompunerea binomului lui Newton are în dezvoltarea sa $(n + 1)$ termeni, unde n – exponentul puterii binomului. Succesivitatea scrierii termenilor în partea dreaptă a descompunerii pentru $n \in N$, se întrerupe cu apariția primului termen egal cu zero, ceea ce reprezintă al $(n + 2)$-lea termen al descompunerii)

La compartimentul elemente de logică matematică se pot propune:

1. *7 verigi.*

Un om bogat, dar înțelept, sosind la o stațiune balneară particulară, se adresează stăpânului stațiunii cum să facă să se odihnească cât mai bine. În timpul discuției cel bogat se desfăta rostogolind printre degete un lanț gros de aur din 7 verigi. Cel cu stațiunea balneară, văzând frumusețea de lanț, îi propune să se odihnească 7 zile în contul întregului lanț. Cel bogat, dar zgârcit, nu dorea să se despartă de o dată de întregul lanț şi se învoi să-i dea stăpânului lanțul doar pe parcursul întregii săptămâni şi numai câte o verigă pe zi. Stăpânul stațiunii a înțeles că se distruge farmecul lanțului şi îi propune o condiție în plus: „câte verigi netăiate îi va înmâna – atâtea zile în plus gratis, adică pe contul stațiunii se va odihni”. Cum a procedat omul bogat, dacă el, dând în fiecare zi stăpânului stațiunii câte o verigă, a câştigat în plus încă 6 zile de odihnă? Care verigă a tăiat din lanțul său? (R: A treia)

2. *100 lei în 10 plicuri.*

Să se repartizeze *100 lei* în *10 plicuri*, astfel încât, orice sumă de bani va fi cerută de la *1 leu* până la *100 lei*, să se achite doar prin intermediul plicurilor, fără a număra banii, adică fără a deschide plicul. Cum trebuie repartizați banii? Este nevoie neapărat de *10 plicuri*? (R: *1, 2, 4, 8, 16, 32, 37.* Sunt de ajuns şi *7* plicuri)

La compartimentul elemente de analiză matematică se pot propune:

1. ***O limită curioasă.***

Iată un mijloc simplu de a determina limita expresiei x pentru $x = 0$ și a rezolva ecuația de forma $y = x^x$. Logaritmăm ambele părți ale ecuației date în baza *x*. Obținem: $log_x y = x log_x x = x$. Trecem la limită când $x \to 0$. Avem: $\lim_{x \to 0} log_x y = \lim_{x \to 0} x = 0$. Deci: $\lim_{x \to 0} y = 1$. Am obținut, în condițiile admise: $0^0 = 1$. Este destul de curios. Nu? Unde s-a comis eroarea? (R: Domeniul valorilor admisibile ale lui *x* din expresia de sub semnul logaritmului, apoi a limitei trebuie să fie pozitiv, adică $x > 0$)

Prin ce se manifestă utilitatea rezolvării sofismelor în studierea matematicii? Ce aport pozitiv aduc?

Un cititor atent, cu un spirit ingenios de observație și cercetare, cugetător, desigur, va observa că în mai multe sofisme sunt comise erori asemănătoare. O înțelegere clară a esenței a astfel de erori cu mult va ușura depistarea sau soluționarea situațiilor analoage.

Studierea sofismelor mai întâi de toate dezvoltă logica cugetării, adică altoiește deprinderile de a cugeta logic corect. A depista o eroare într-un sofism – înseamnă a-l înțelege/contempla, iar contemplarea lui adecvat corectă preîntâmpină repetarea unui raționament greșit sau a unei erori în alte situații. Analizarea și cercetarea sofismelor contribuie la asimilarea și achiziționarea conștientă a materiei studiate și formarea competențelor matematice fundamentale, dezvoltă spiritul de observație, perspicacitatea cugetării, precum și o atârnare cât mai critică față de studierea matematicii; dezvoltă atenția și prudența în formularea corectă a raționamentului; altoiește corectitudinea executării notărilor și a construcțiilor/desenelor, elaborării generalizărilor și selectării concluziilor necesare corecte din multitudinea de posibilități și totalizarea logică în executarea operației necesare.

Bibliografie

1. Achiri I. Sofisme matematice. Chișinău: Știința, 1992. 120 p.
2. Balk M.B., Balk G.D. Matematica în afara orelor de curs. Moscova: Prosveșcenie, 1971. 462 p. (în rusă)
3. Ball J. Misterele matematicii. București: Litera Internațional, 2008. 96 p.