CZU: 510.22

APLICAREA MATRICELOR LA STUDIEREA RELAȚIILOR BINARE

Valeriu BORDAN, dr., conf. univ.

Catedra Algebră, Geometrie și Topologie, Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În acest articol se arată cum poate fi identificată o relaţie binară și cum poate fi stabilit tipul acesteia cu ajutorul matricei asociate.

Cuvinte cheie: produs cartezian, relație binară, matrice asociată, relație binară reflexivă, simetrică, tranzitivă, de echivalență.

Summary. In this article shows how a binary relationship can be identified and how its type can be determined using the associated matrix.

Key words: cartesian product, binary relation, associated matrix, reflexive, symmetrical, transitive, of equivalence binary relation.

Indiscutabil este faptul că matricele au o importanță deosebită în matematică, având o aplicabilitate în algebra liniară, geometrie, analiza matematică, fizică, informatică, grafică, economie, meteorologie, etc.

În acest articol vom arăta o altă aplicabilitate a matricelor în teoria mulțimilor, mai exact vom arată cum poate fi identificată o relaţie binară și cum se stabilește tipul ei cu ajutorul matricei asociate acesteia.

Considerăm două mulțimi arbitrare A şi B, iar $A\times B$ produsul cartezian al acestor mulțimi.

Prin relaţie binară definită pe mulțimile A şi B în această ordine, vom înțelege orice submulţime a produsului cartezian $A\times B$ [3].

Dacă notăm cu α această relaţie binară şi dacă $(a,b)\in\alpha,$ atunci se mai scrie astfel $a\alpha b,$ iar dacă $(a,b)\notin\alpha,$ se scrie $a\overline{\alpha}b.$ În cazul când $A=B$ vom spune că α este o relaţie binară definită pe mulţimea A [2].

Considerăm A şi B două mulţimi finite cu elementele $A=\{x_1,x_2,...,x_m\},\ B=\{y_1,y_2,...,y_n\}.$ Atunci fiecărei relaţii $\alpha\subseteq A\times B$ i se asociază o matrice $M_\alpha=(a_{ij})_{i=\overline{1,m},\,j=\overline{1,n}},$ unde $a_{ij}=\begin{cases}1, & dacă\ x_i\alpha y_i\\ 0, & dacă\ x_i\overline{\alpha}y_i\end{cases}.$

M_α se numeşte matricea asociată relaţiei binare α [1].

Exemplul 1. Fie date mulțimile $A=\{1,3\},$ $B=\{2,4,5\}$ şi relația $\alpha=\{(x,y)\in A\times B,\ 3\,|\,(\mathrm{x}-2\mathrm{y})\}.$

*Soluție. M*atricea asociată relaţiei α este $M_\alpha=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

Exemplu 2. Fie date mulțimile $A=\{1,2,3,4\},B=\{-1,0,1\}$. Considerăm relația binară $\alpha=\{(x,y)\in A\times B, x^2+y^2\geq 5\}$. Determinați matricea asociată acestei relații.

Soluție. Deoarece explicit relația binară dată are forma $\alpha=\{(2,-1),(2,1),(3,-1),(3,0),(3,1),(4,-1),(4,0),(4,1)\}$, rezultă că matricea asociată ei este

$$M_\alpha=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

În continuare vom cerceta relații binare definite pe mulțimea $A.$ Astfel, în cazul dat produsul cartezian va avea forma $A\times A=A^2,$ iar $\alpha\subseteq A^2.$ Deci, în acest caz matricea asociată relației binare va fi o matrice pătratică de ordinul $n,$ unde n este numărul de elemente din mulțimea $A.$

Exemplul 3. Considerăm mulțimea $A=\{x\in Z, |\,x\,|<3\}.$

Considerăm următoarele matrice asociate relațiilor binare corespunzătoare: M_α, M_β, M_γ.

$$M_\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ M_\beta=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\ M_\gamma=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

1) Scrieți explicit relațiile $\alpha,\beta,\gamma.$
2) Cercetați relațiile date la reflexivitate, simetrie și tranzitivitate.
3) Completați matricea M_α cu numărul minim de unități, astfel ca aceasta să corespundă unei relații tranzitive definite pe mulțimea A. Scrieți explicit această relație.
4) Scrieți matricea asociată celei mai simple relații de echivalență, definite pe mulțimea A.

Soluție. 1) Din condiția dată rezultă că mulțimea A are forma: $A=\{-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2\}.$ Unitățile incluse în matricele asociate M_α, M_β, M_γ arată elementele corespunzătoare din produsul cartezian $A^2,$ care alcătuiesc relațiile binare corespunzătoare $\alpha,\beta,\gamma.$ Astfel obținem:

$\alpha=\{(-2,-2),(-2,1),(-1,-1),(0,0),(1,1),(1,2),(2,2)\},$

$\beta=\{(0,-2),(0,0),(1,2),(2,2)\},\quad \gamma=\{(-2,1),(-1,2),(1,-2),(1,2),(2,-1),(2,1)\}.$

2) Având matricele asociate relațiilor binare ușor se verifică relațiile la reflexivitate și simetrie.

2.1) Cercetăm relațiile la reflexivitate.

a. Observăm ca matricea M_α are toate elementele pe diagonala principală egale cu 1, ceea ce înseamnă că toate perechile de elemente de forma $(a,a)\in\alpha,\ \forall a\in A,$ prin urmare relația α este reflexivă.

b. Matricea M_γ însă, nu are nici o unitate pe diagonala principală, ceea ce înseamnă că toate perechile de elemente de forma $(a,a) \notin \alpha,$ prin urmare relația α este relație antireflexivă.
c. Matricea M_β, având pe diagonala principală unele elemente egale cu 1, iar altele egale cu zero, implică faptul că unele din perechile $(a,a) \in \beta,$ iar altele nu aparţin ei, deci relația β nu-i nici reflexivă şi nici antireflexivă.

2.2) Observăm că din matricele M_α, M_β, M_γ este simetrică față de diagonala principală doar matricea M_γ, prin urmare doar relația binară γ este simetrică. Pentru matricele M_α, M_β se observă că pentru ambele se verifică condiția antisimetriei, adică din faptul că $(a,b),(b,a) \in \alpha,$ rezultă că $a = b.$ Similar are loc aceasta și pentru relația binară $\beta.$ Deci, relațiile α și β sunt antisimetrice.

2.3) Relațiile α și γ sunt netranzitive, iar relația β este tranzitivă, fiindcă doar relația β verifică condiția $\forall (a,b),(b,c) \in \gamma \Rightarrow (a,c) \in \gamma.$

3) Dacă completăm matricea M_α cu o singură unitate pe locul a_{15}, adică considerând $a_{15} = 1$, obținem o matrice nouă M_{α^1}, care este asociată relației α^1, aceasta fiind tranzitivă.

Deci, relația tranzitivă obținută după completarea relației α cu perechea $(-2,2)$ este:
$\alpha^1 = \{(-2,-2),(-2,1),(-1,-1),(0,0),(1,1),(1,2),(2,2),(-2,2)\}$.

4) Evident că cea mai simplă relație de echivalență definită pe mulțimea A este relația $\varepsilon = \{(-2,-2),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2)\},$ prin urmare, matricea asociată acestei relații are forma:

$$M_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bibliografie

1. Balint Ş., Caşu I. Lecţii de teoria mulţimilor. Timișoara: Editura Universității de Vest, 2002.
2. Bordan V. Despre matricea asociată unei relații binare. În: International conference. MITRE-2011. Chișinău, 2011. p. 160-161.
3. Năstăsescu C. Introducere în teoria mulţimilor. Bucureşti: Editura Didactică şi Pedagogică., 1974.