APLICAREA LOCURILOR GEOMETRICE DE PUNCTE LA REZOLVAREA PROBLEMELOR DE CONSTRUCȚIE

Laurențiu CALMUȚCHI, dr. hab., prof.univ., UST

Rezumat. În acest articol se aduc exemple de determinare și aplicare a locurilor geometrice de puncte la rezolvarea problemelor geometrice de construcție.

Cuvinte cheie: problemă de construcție, loc geometric de puncte, cercetare.

APPLICATION OF GEOMETRIC PLACES OF POINTS TO SOLVE CONSTRUCTION PROBLEMS

Abstract. In this article we provide examples of determining and applying geometric points to solve geometric construction problems.

Keywords: construction problem, geometric place of points, research.

Problemele de construcție au atras atenția matematicienilor din toate timpurile. În secolul IV î.e.n. au apărut problemele, care au devenit clasice: problema cuadraturii discului, problema dublării cubului și problema trisecției unghiului. Abia la sfârșitul secolului XIX s-a demonstrat, că aceste probleme de construcție nu pot fi rezolvate numai cu rigla și compasul. Cercetările făcute în soluționarea acestor probleme au stat la baza dezvoltării diferitor ramuri ale matematicii, mai cu seamă a algebrei și analizei matematice.

Nici un fel de alte probleme nu contribuie atât de mult pentru dezvoltarea gândirii logice a elevilor decât problemele de construcție.

Planul de rezolvare a oricărei probleme de construcție reprezintă un lanț de construcții de bază (elementare), care fiind efectuate duc la soluția problemei. Prin urmare, acest plan poate fi privit ca un oarecare algoritm și de aceea poate fi folosit ca un material util în cursul de informatică și în tehnica de calcul. Problemele de construcție dezvoltă deprinderile de a soluționa problemele practice. Prin intermediul acestor probleme se dezvoltă deprinderile de cercetare și de lucru independent.

Rezolvând problemele de construcție, chiar și cele mai simple, mai profund se conștientizează materialul teoretic acumulat despre figurile geometrice, deoarece în procesul rezolvării acestor probleme se formează un model ilustrativ a proprietăților și a relațiilor studiate, se lucrează cu acest model. Rezolvarea problemelor de construcție dezvoltă așa calități ale personalității ca atenția, disciplina, inițiativa, gândirea logică, creativitatea, dragostea de muncă.

Cu părere de rău în manualele școlare de matematică actuale nu se acordă o atenție meritată problemelor de construcție. Probabil autorii manualelor de matematică n-au consultat suficient manualele [2, 3].

Metodele de rezolvare a problemelor de construcție sunt foarte variate. Una din aceste metode este metoda locurilor geometrice de puncte.

Se numește loc geometric de puncte (LGP) figura, toate punctele căreia posedă o anumită proprietate și care proprietate o posedă doar punctele acestei figuri.

Exemple de locuri geometrice de puncte sunt: mediatoarea segmentului, bisectoarele unghiului, cercul, elipsa și altele.

Aplicarea (LGP) la rezolvarea problemelor de construcție poartă denumirea de metoda locurilor geometrice.Esența acestei metode constă în următoarele:

Soluția problemei de construcție se reduce la determinarea unui oarecare punct, care satisface la două condiții independente. Se omite una din aceste condiții și se determină (LGP) , care satisface la a doua condiție. Fie acest loc este figura F_1.Se omite apoi a doua condiție și se determină figura F_2, care satisface primei condiții. Fiecare punct din intersecția $F_1 \cap F_2$ permite posibilitatea de a determina o oarecare soluție a problemei.

În [2, 3] există problema de a construi triunghiul, fiind date latura a, unghiul A și înălțimea h_a dusă pe latura a.

Această problemă a fost propusă la mai multe clase de elevi, grupe de studenți și uneori profesorilor de matematică de la cursurile de perfecționare. La niciunul din aceste experimente rezultatele n-au fost satisfăcătoare. Dacă chiar unii își aminteau despre (LGP) din care latura a se vede sub unghiul A, nu erau în stare să construiască acest (LGP).

În $[1]$ se demonstrează ce reprezintă (LGP) din care segmentul $[AB]$ se vede sub unul și același unghi de mărimea α (Fig.1). Astfel se determină că locul geometriei de puncte F, din care segmentul dat se vede sub unghiul dat reprezintă reuniunea a două arce de cerc deschise, care trec prin extremitățile segmentului dat, fiind simetrice față de segmentul dat .

Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, atunci figura F se transformă într-un cerc cu diametrul $[AB]$ (fără punctele *A* și *B*). Dacă $\alpha = 0$, atunci F reprezintă diferența dintre dreapta (AB) și segmentul $[AB]$. Dacă $\alpha = 180°$, atunci acest loc geometric de puncte reprezintă intervalul determinat de punctele *A* și *B*.

Majoritatea elevilor și studenților întâmpină mari greutăți în construcția acestui loc geometric de puncte. În cele ce urmează vom aduce câteva metode de construcție a unui loc geometric de puncte, din care segmentul dat $[AB]$ se vede sub unghiul dat α.

1. Problema pusă se reduce la construirea uneia din cercurile care trec prin extremitățile segmentului dat. Așa cum două puncte ale cercului sunt cunoscute, rămâne să determinăm încă un punct. Ușor poarte fi determinat punctul cercului căutat care aparține perpendicularei la segmentul $[AB]$ duse prin punctul *A* (sau *B*). (Fig. 2). Pentru a determina un așa punct este suficient de construit perpendiculara la segmentul $[AB]$în punctul *A* (sau *B*) și de construit unghiul *ABC* de mărimea $90° - \alpha$. La intersecția semidreptei $[BC)$ cu perpendiculara dusă în punctul *A* se obține cel de-al treilea punct *M* a cercului căutat.

2. Cel de-al treilea punct al cercului căutat poate fi determinat și în felul următor: se construiesc unghiurile *ABC* și *BAD* de mărimi $\frac{\pi}{2} \sim \frac{\alpha}{2}$. (Fig. 3). La intersecția semidreptelor $[BC)$ și $[AD)$ se obține punctul *M* din care se vede segmentul $[AB]$ sub unghiul α. Același punct *M* poate fi determinat și ca intersecția semidreptei $[AD)$ a unghiului *BAD* cu mediatoarea segmentului $[AB]$.

3. Fie pentru segmentul dat $[AB]$ este construit arcul deschis *AMB* din punctele căruia segmentul $[AB]$ se vede sub unhgiul dat α.Atunci unghiul la centru *AOB* are măsura 2αși triunghiul *AOB* este isoscel. Triunghiul *AOB* poate fi construit după latura *AB* și unghiurile alăturate de mărime $90° - \frac{\alpha}{2}$. Rămâne din punctul *O*, ca din centru, de construit cercul de rază $r = |OA|$ (Fig. 4).

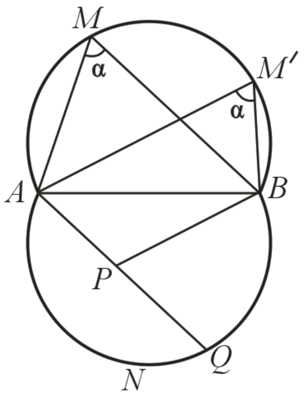

Fig. 1

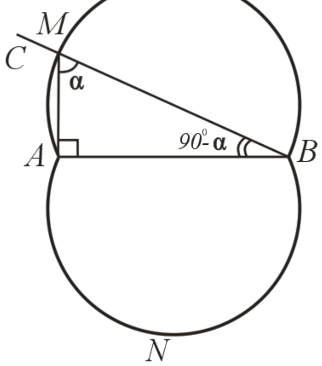

Fig. 2

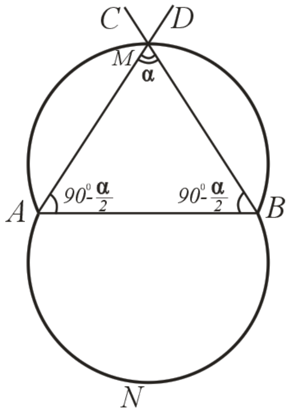

Fig.3

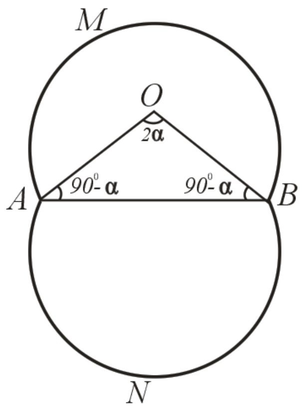

Fig. 4

Exemplul 1. Este dat un cerc ω, două puncte *A* și *B* pe acest cerc și o dreaptă *l* . Pe cercul ω de construit așa un puct *C* încât dreptele *AC* și *BC* să taie pe dreapta *l* un segment *[MN]* de lungime *m*. Soluție. Să presupunem că problema este rezolvată și punctul *C* este cel căutat (Fig. 4). Translăm punctul *A* paralel la dreapta *l* în punctul A_1 la distanța *m.* Unim punctele *A* și *N*. Atunci figura AA_1NM este un paralelogram deoarece $|AA_1| = |NM|$ și $[AA_1]||$[NM]. Prin urmare $\hat{A} = \hat{N} = \alpha$, unde α este mărimea unghiului înscris în cercul ω , care se sprijină pe coarda *AB*.

Construcția.

1. Translăm punctul *A* paralel la dreapta *l* la distanța *m* . Fie A_1 este imaginea punctului *A* ;
2. Pe segmentul A_1B construim locul geometric de puncte din care segmentul A_1B se vede sub unghiul α;
3. Fie *N* este unul din punctele de intersecție a acestui loc geometric cu dreapta *l* ;
4. Punctul *C* este punctul de intersecție a cercului ω cu segmentul *BN*.

   Cercetarea. În dependență de mărimea și poziția elementelor date problema poate avea până la patru soluții, deoarece translația paralelă a punctului *A* poate fi efectuată în două direcții.

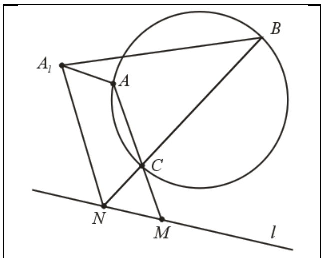

Fig.4

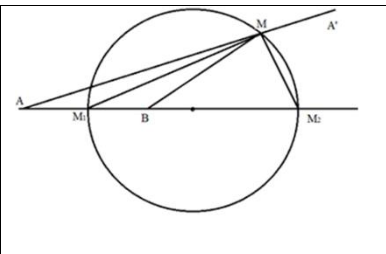

Fig.5

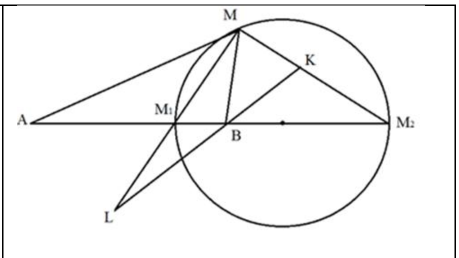

Fig.6

Exemplul 2. Pe plan sunt date două puncte A și B. De aflat locul geometric de puncte M a planului, astfel încât $|AM|:|MB| = 2$.
Soluție.

Metoda I.

Să presupunem la început, că punctul M nu aparține dreptei AB. Fie M posedă astfel de proprietate, adică $|AM| = 2|MB|$. Prelungim segmentul AB (Fig. 5) și construim bisectoarele unghiurilor AMB și $BMA^{'}$. Fie M_1 punctul de intersecție al bisectoarei unghiului AMB cu segmentul AB, iar M_2 punctul de intersecție al bisectoarei unghiului BMA' cu prelungirea segmentului AB. Conform proprietății bisectoarei unghiului interior al triunghiului, avem:

$$|AM_1|:|M_1B| = |AM|:|MB| = 2 \qquad (1)$$

Conform proprietății bisectoarei unghiului exterior al triunghiului, avem:

$$|AM_2|:|M_2B| = |AM|:|MB| = 2 \qquad (2)$$

Din (1) și (2) urmează, că poziția punctelor M_1 și M_2 pe dreapta AB nu depinde de aceia, unde este situat punctul M. Având în vedere, că unghiul dintre bisectoarea unghiului interior a triunghiului și bisectoarea unghiului exterior al triunghiului este unghi drept, atunci devine clar, dacă punctul M aparține locului geometric de puncte căutat, atunci segmentul M_1M_2 se vede din punctul M sub un unghi drept. Aceasta înseamnă că punctul M aparține cercului, construit pe M_1M_2, ca pe diametru.

Judecata de mai sus își pierde sensul în cazul, când punctul M aparține dreptei AB (în acest caz nu se poate, de exemplu, de cercetat unghiul AMB și bisectoarea acestuia). Pe dreapta AB, să determinăm punctul M, care satisface locului geometric de puncte căutat ne ajută punctele M_1 și M_2, deja construite. Punctul M_1 împarte segmentul AB (considerând de la punctul A) în raport $2:1$. Punctul M_2 este îndepărtat de la punctul A la o distanță de două ori mai mare decât de la punctul B.

Să demonstrăm acum afirmația inversă: fiecare punct M al cercului, construit pe M_1M_2, ca pe diametru, posedă prorpietatea: $|AM| = 2|BM|$, adică aparține locului geometric de puncte căutat. Extremitățile diametrului M_1M_2, adică punctele M_1 și M_2, evident, posedă proprietatea cerută. Fie $M -$ un punct arbitrar al cercului cu diametrul M_1M_2 (Fig. 6). Construim prin punctul B o dreaptă, paralelă la dreapta AM și fie K, L punctele de intersecție ale acestei drepte cu dreptele MM_2 și MM_1 corespunzător. Din asemănarea triunghiurilor AMM_2 și BKM_2, avem:

$$\frac{|AM|}{|BK|} = \frac{|AM_2|}{|BM_2|} = 2.$$

Din asemănarea triunghiurilor AMM_1 și BLM_1, avem: $\frac{|AM|}{|BL|} = \frac{|AM_1|}{|BM_1|} = 2.$ Din egalitățile primite urmează, că $|BK| = \frac{|AM|}{2}$ și $|BL| = \frac{|AM|}{2}$, adică $|BK| = |BL|$.

Prin urmare, în triunghiul dreptunghic KML, segmentul BM este mediană și deci, $|BM| = |BK|$. Având în vedere, că $\frac{|AM|}{|BK|} = 2$, obținem: $\frac{|AM|}{|BM|} = 2$. Așa dar, fiecare punct al cercului cu diametrul M_1M_2, posedă proprietatea cerută.

Metoda II.

Introducem un sistem rectangular cartezian de coordonate cu originea în punctul A , iar axa absciselor să coincidă cu dreapta AB . Fie că în acest sistem punctul B are coordonatele (m;0).

Să presupunem că punctul arbitrar *M(x; y)* aparține locului geometric pentru care $|AM| = 2|BM|$. Deoarece

$$|AM| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ și } |BM| = \sqrt{(x-m)^2 + y^2},$$

urmează că coordonatele punctului *M* satisfac ecuației:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-m)^2 + y^2}. \quad (1)$$

Transformăm ecuația (1) în felul următor:

$$x^2 + y^2 = 4x^2 - 8mx + 4m^2 + 4y^2,$$

$$x^2 - \frac{8}{3}mx + \frac{4}{3}m^2 + y^2 = 0,$$

$$(x - \frac{4}{3}m)^2 + y^2 = \frac{4}{9}m^2. \quad (2)$$

Ecuația primită reprezintă un cerc cu centrul în punctul C $(\frac{4}{3}m; 0)$ și raza egală cu $\frac{2}{3}m$.

Să demonstrăm și afirmația inversă. Presupunem că punctul *M(x; y)* aparține cercului determinat de ecuația (2). Aceasta înseamnă că coordonatele punctului M satisfac ecuației (2), care este echivalentă cu ecuația (1) (conform judecății de mai sus). Prin urmare, locul geometric de puncte căutat reprezintă un cerc cu centrul C$(\frac{4}{3}m; 0)$ și raza R=$\frac{4}{3}m$.

Bibliografie

1. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. Москва, Учпедгиз, 1957. 266 с.
2. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. Геометрия. Москва: Просвещение, 1994.
3. Погорелов А. В. Геометрия 6-7. Москва: Просвещение, 1984.