CZU: 517.982.22

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ *Ф* –НЕДОПУСТИМОМ ВОЗМУЩЕНИИ ХАРАСТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ СИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА

Галина ВОРНИЧЕСКУ

Тираспольский Государственный Университет, Молдова

Резюме. В статье построены примеры интегральных операторов с точечными особенностями, которые не являются допустимыми возмущениями для характеристических сингулярных интегральных операторов. Это означает, что построенные примеры операторов могут влиять на нётеровы условия сингулярных операторов.

Ключевые слова: возмущённые сингулярные операторы, условия Нётера.

Abstract. In this paper examples of integral operators with point-like singularities which do not represent admissible disturbances for the characteristic singular integral operators are constructed. This means that the built operators can influence the noetherian conditions of the singular operators.

Keywords: perturbed singular operators, noetherian conditions.

Обозначим через $N(B)$ −ножество всех нётеровых операторов, действующих в банаховом пространстве B и пусть H − гильбертово пространство. Хорошо известно, что если оператор K принадлежит множеству $L(H)$ и обладает свойством $A+K\in N(H)$ для каждого $A\in N(H)$, то K вполне непрерывен. А что если потребовать, чтобы импликация $A\in N(H) \rightarrow A+K\in N(H)$ выполнялось для всех $A\in N(H)$, скажем, для всех сингулярных интегральных нётеровых операторов. Обязательно ли в этом случае K вполне непрерывен? Оказывается, что не обязательно. Примеры таких операторов можно найти в работах [1-3].

В монографиях Н.И. Мусхелишвили и Ф.Д. Гахова полным сингулярным интегральным оператором называют оператор вида

$$(A\varphi)(t)=a(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{k(\tau,t)\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \tag{1}$$

где $a(t)$ и $k(\tau,t)$ -функции, удовлетворяющие условию Гельдера соответственно на Γ и $\Gamma\times\Gamma$, а интеграл понимается в смысле главного значения. Оператор A, определенный равенством (1), можно представить в виде $A=aI+bS+T$, где $b(t)=k(t,t)$, а T -интегральный оператор с ядром

$$k_0(\tau,t)=\pi i\frac{k(\tau,t)-k(t,t)}{\tau-t}. \tag{2}$$

В случае, когда $k(\tau,t)$ удовлетворяеt условию Гельдера на $\Gamma\times\Gamma$, ядро (2) имеет слабую особенность, поэтому оператор T является вполне непрерывным в пространстве $L_p(\Gamma)$. В силу этого оператор A является нетеровым в пространстве $L_p(\Gamma)$, тогда и только тогда, когда этим свойством обладает оператор

$$A_0=aI+bS,$$

называемый характеристечской частью оператора A. В свяи с этим теория Нётера сингулярных операторов развивалась в основном для характеристических операторов. В этом направлении достигнуты значительные успехи. Получены критерии нетеровости таких операторов с кусочно-непрерывными коэффициентами, с коэффициентами, имеющими разрывы почти-периодического типа, с произвольными коэффициентами из $L_\infty(\Gamma)$. Однако, во многих задачах механики, физики и других областей, приводящих к сингулярным уравнениям, появляются не характеристические операторы, а полные. В связи с этим возникает необходимость исследовать полные сингулярные операторы (1) с функциями и $k(\tau,t)$ не обязательно удовлетворяющих условию Гёльдера. Основная трудность здесь состоит в том, что оператор T с ядром (2) может оказаться не вполне непрерывным (не компактным) или (что более важно) перестать быть Φ-допустимым возмущением для характеристических сингулярных операторов.

Покажем это на примере. Пусть Γ_0 -единичная окружность, $\chi(t)$ - характеристическая функция множества $\{\mathrm{Im} t > 0\} \cap \Gamma_0$; $k(\tau,t) = \chi(t) - \chi(\tau)$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(A\varphi)(t) = \lambda\varphi(\mathrm{t}) + \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{k(\tau,t)\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau .$$

В этом пример $k(t,t) = 0$, следовательно, характеристическая часть оператора A является скалярным оператором $(A_0\varphi)(t) = \lambda\varphi(t)$. Оператор A в этом примере можно представить в виде $A = \lambda I + \chi S - S\chi I$, откуда следует, что он принадлежит алгебре A_p, порожденной сингулярными интегральными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами. В работе [2] показано, что на алгебре A_p можно ввести символ $(\gamma_{t,\mu})$ $\big((t,\mu) \in \Gamma_0 \times [0,1]\big)$, который на образующих S и aI принимает вид

$$\gamma_{t,\mu}(aI) = \left\| \begin{matrix} a(t+0)f_p(\mu) + a(t-0)(1-f_p(\mu)) & (a(t+0)-a(t-0))h_p(\mu) \\ (a(t+0)-a(t-0))h_p(\mu) & a(t+0)(1-f_p(\mu)) + a(t-0)f_p(\mu) \end{matrix} \right\|,$$

где

$$f_p(\mu) = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta\,\mu}{\sin\theta} e^{i\theta(\mu-1)} \quad \left(\theta = \dfrac{\pi(p-2)}{2}\right), & \text{при } p \neq 2 \\ \mu & \text{при } p = 2 \end{cases},$$

а $h_p(\mu)$ - некоторая фиксированная непрерывная ветвь функции $\sqrt{f_p(\mu)(1-f_p(\mu))}$.

В частности, для оператора $A = \lambda I + \chi S - \mathrm{S}\chi I$ при $p = 2$ имеем: $\det\gamma_{t,\mu}(A) = \lambda^2$ при $t \neq \pm 1$ и $\det\gamma_{t,\mu}(A) = \lambda^2 + 4\mu(1-\mu)$ при $t = \pm 1$. Оператор A является нётеровым в $L_2(\Gamma)$ в том и только том случае, когда $\lambda^2 + 4\mu(1-\mu) \neq 0$. при всех $\mu \in$ [0,1]. Это равносильно тому, что $\lambda \neq ti$, где $t \in$ [-1,1] .

Таким образом, при $\lambda = \tau i,$ где $\tau \in$ [-1,1] \{0}, оператор A не является нётеровым, а его характеристическая часть A_0 является нётеровым. Отсюда следует, что оператор $M = A - A_0$ не является -допустимым возмущением характеристической части оператора A. Отсюда также следует, что оператор M не является компактным.

Приведём ещё один контрпример в теории сингулярных интегральных операторов. Пусть $\Gamma -$ замкнутый ляпуновский контур, $P = \frac{1}{2}(I + S)$, $Q = \frac{1}{2}(I - S)$, где S оператор сингулярного интегрирования вдоль Γ:

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Известно (см. [1]), что если $a, b \in L_{\infty}(\Gamma)$ и $b(t) \geq \delta > 0,$ то операторы $A = aP +$ $+Q$ и $B = baP + Q$ одновременно являются либо не являются нётеровыми в пространстве $L_p(\Gamma)$ и их индексы совпадают. Естественно, возникает вопрос, переносится ли это утверждение на сингулярные операторы с матричными коэффициентами, действующие в пространстве $L_p^m(\Gamma)$. Мы покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный. Точнее, имеет место следующее предложение.

Теорема 1. *Для каждого* p $(1 < p < \infty)$ *и натурального* $m (m \geq 2)$ *существуют матрицы-функции* $a, b \in L_{\infty}^{m\times m}(\Gamma)$ *такие, что* $b(t) \geq \delta > 0,$ $baP + Q$ *является нётеровым в* $L_p^m(\Gamma),$ *а оператор* $aP + Q$ *не является нётеровым в этом пространстве.*

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $\Gamma -$ единичная окружность и $m = 2$.

Рассмотрим сначала случай $p = 2$. Пусть $t = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$,

$$a(t) = \begin{Vmatrix} 2 - cos\frac{\theta}{2} & 1 \\ -4 + sin\frac{\theta}{2} & 2 + cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix}, \quad b(t) = \begin{Vmatrix} 3 + 2cos\frac{\theta}{2} & 1 \\ 1 & 2 - cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix},$$

Матрицы-функции a, b непрерывны в каждой точке $t \in \Gamma$, кроме точки $t = 1$. Как известно [1] , оператор $aP + Q$ является нётеровым в пространстве $L_2^2(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$det\lfloor \mu a(t+0) + (1-\mu)a(t-0)\rfloor \neq 0 \ (t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1).$$

Непосредственно проверяется, что при $\mu_0 = \frac{1}{2}$ и $t_o = 1$ $det\lfloor \mu_o a(t_0 + 0) + (1 - \mu_o)a(t_0 - 0)\rfloor = 0$. Таким образом, оператор $aP + Q$ не является нётеровым. Пусть $c = ab$; легко проверить что $det\lfloor \mu c(t+0) + (1-\mu)c(t-0)\rfloor \neq 0$ $(t \in \Gamma, 0 \leq \mu \leq 1)$, т.е. оператор $aP + Q$ является нётеровым. Для случая $p = 2$ теорема доказана.

Случай произвольного p можно свести к случаю $p = 2$ с помощью следующего предложения.

Пусть $g \in L_{\infty}^{m\times m}(\Gamma) -$ матрица-функция, непрерывна в каждой точке $t \neq 1$ и имеющая конечные пределы $g(t \pm 0)$, $p -$ произвольное число $(1 < p < \infty)$; $\gamma = \frac{(p-2)}{2p}$ и

$$h(t) = \begin{bmatrix} e^{i\gamma\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma\theta} \end{bmatrix}$$

$(t = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta < 2\pi)$. Для того, чтобы оператор $gP + Q$ был нётеровым в пространстве $L_p^2(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $hgP + Q$ был нётеровым в пространстве $L^2{}_2(\Gamma)$. Докажем это утверждение. Как известно [1], оператор $gP + Q$ является нётеровым в пространстве $L_p^2(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда

a) $detg(t \neq 0) \pm 0,\ \ \forall t \in \Gamma$;

b) для каждого собственного числа λ_j матрицы $g^{-1}(t+0)g(t-0)$ выполнено соотношение $arg\lambda_j \neq 2\pi/p,\ \left(0 \leq arg\lambda_j < 2\pi\right)$.

Записывая аналогичный критерий для оператора $hgP + Q$, действующего в пространстве $L_p^2(\Gamma)$, придем к тем же условиям a) и b).

Литература

1. Krupnik N. Banach algebras with symbol and singular integral operators. Basel-Boston: Birkhäuse, 1997. 138 p.
2. Neagu V. Some general questions of the theory of singular operators in the case of piecewise Lyapunov contour. Revue d´analyse numérique et de théorie de l´approximation, tome XXIX, №1, 2000. p.57-73.
3. Ворническу Г., Нягу В. Критерии нётеровости некоторых возмущённых интегральных операторов. Studia Universitatis, Ştiinţe exacte şi Economice, №, 2020, p.