CZU: 372.851

FORMELE CANONICE ALE SISTEMELOR DIFERENȚIALE CUARTICE CU DREAPTA DE LA INFINIT DE MULTIPLICITATE MAXIMALĂ

Vadim REPEȘCO, doctor, conferențiar universitar
Catedra Analiza Matematică și Ecuații Diferențiale, UST

Rezumat. Considerăm sistemul diferențial cuartic general $\dot{x} = P(x,y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$, unde $P,Q \in \mathbb{R}[x,y]$, $\max\{\deg P, \deg Q\} = 4$, $GCD(P,Q) = 1$. Dacă un sisteme diferențial polinomial posedă un număr suficient de drepte invariante, considerate cu multiplicitățile lor, atunci, conform [1], putem construi o integrală primă Darboux. În acest articol vom arăta că multiplicitatea maximală a dreptei invariante de la infinit este egală cu zece. Deoarece sistemele obținute sunt extrem de voluminoase, nu le vom prezenta în articol, ci doar la conferință, iar aici vom arăta doar calea obținerii lor.

Cuvinte cheie: sisteme diferențiale cuartice, drepte invariante, multiplicitate, integrabilitate Darboux.

Abstract. Consider the generic cuartic differential system $\dot{x} = P(x,y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$, where $P,Q \in \mathbb{R}[x,y]$, $\max\{\deg P, \deg Q\} = 4$, $GCD(P,Q) = 1$. If a polynomial differential system has enough invariant straight lines considered with their multiplicities, then, according to [1], we can construct a Darboux first integral. In this paper, we show that the maximal multiplicity of the invariant straight line at the infinity is equal to ten. Because the obtained systems are too big, we will not enumerate in this article, but only at the conference, and here we'll show only the way to obtain them.

Keywords: cuartic differential systems, invariant straight line, multiplicity, Darboux integrability.

Considerăm sistemul diferențial cuartic, adică sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases}, \qquad GCD(P,Q) = 1 \tag{1}$$

unde $\max\{\deg P, \deg Q\} = 4$. Vom nota câmpul vectorial asociat acestui sistem prin

$$\mathrm{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2}$$

Definiția 1: O curbă algebrică $f(x,y) = 0$, $f \in \mathbf{C}[x,y]$, se numește ***curbă algebrică invariantă*** a sistemului (1), dacă există un polinom $K_f \in \mathbf{C}[x,y]$, astfel încât are loc identitatea

$$\mathrm{X}(f) = f(x,y)K_f(x,y). \tag{3}$$

Dacă curbele algebrice invariante ale sistemului (1) sunt de gradul întâi, adică au forma $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$, atunci ele se numesc ***drepte invariante*** ale sistemului (1).

Dacă există o funcție neconstantă de forma $F = f_1^{\lambda_1} \cdot f_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot f_s^{\lambda_s}$, unde f_j, $j = \overline{1,s}$ sunt curbe algebrice invariante și $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,s}$, astfel încât F este sau o integrală primă, sau un factor integrant pentru (1), atunci sistemul (1) se numește ***integrabil Darboux***, iar funcția $F = f_1^{\lambda_1} \cdot f_2^{\lambda_2} \cdot ... \cdot f_s^{\lambda_s}$ - ***integrala Darboux***. Dacă sistemul diferențial polinomial posedă un anumit număr de drepte invariante (pentru care se contorizează și multiplicitățile lor), atunci pentru acesta, conform [1], se poate de construit o integrală primă Darboux.

Dreptele invariante joacă un rol important în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale. Estimarea numărului de drepte invariante pentru un sistem diferențial polinomial se efectuează în lucrarea [2]. În lucrările [3,4] a fost studiată problema coexistenței dreptelor invariante și a ciclurilor limită, iar în [5,6], autorii a rezolvat problema coexistenței dreptelor invariante și punctelor singulare de tip centru pentru sistemele diferențiale cubice. Determinarea claselor canonice pentru sistemele diferențiale cubice ce posedă un număr maxim de drepte invariante incluzând și multiplicitățile lor a fost efectuată în [7,8]. Sistemele diferențiale cubice ce posedă exact opt drepte invariante au fost studiate în [9]. În lucrările [10,11] au fost cercetate sistemele diferențiale cubice cu șase drepte invariante reale de-a lungul a două și trei direcții. În toate aceste lucrări cercetarea sistemelor diferențiale polinomiale se efectuează folosind diferite tipuri de multiplicități ale curbelor algebrice invariante, de exemplu: multiplicitatea paralelă, multiplicitatea geometrică, multiplicitatea algebrică etc [12]. În această lucrare vom utiliza noțiunea de multiplicitate algebrică a unei curbe invariante.

Definiția 2: Fie $\mathbf{C}_m[x]$ spațiul vectorial de polinoame pe $\mathbf{C}[x]$ de gradul maxim m. Atunci acest spațiu are dimensiunea $R = C_{n+m}^{n}$. Fie $v_1, v_2, ..., v_R$ o bază a spațiului $\mathbf{C}_m[x]$. Dacă k este cel mai mare număr natural încât funcția $f(x, y)$ ridicată la puterea k divide polinomul $\det M_R$, unde

$$M_R = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_R \\ \mathrm{X}(v_1) & \mathrm{X}(v_2) & ... & \mathrm{X}(v_R) \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathrm{X}^{R-1}(v_1) & \mathrm{X}^{R-1}(v_2) & ... & \mathrm{X}^{R-1}(v_R) \end{pmatrix},$$

atunci curba algebrică invariantă f de gradul m a câmpului vectorial X posedă ***multiplicitatea algebrică*** k.

În definiția de mai sus, expresia $\mathrm{X}^{R-1}(v_1)$ semnifică aplicarea operatorului X de $R-1$ ori asupra vectorului v_1, adică $\mathrm{X}^{k+1}(v_i) = \mathrm{X}(\mathrm{X}^k(v_i))$.

Multiplicitatea algebrică a dreptei invariante de la infinit

Vom cerceta sistemul diferențial cuartic, adică sistemul (1) de forma

$$\begin{cases} \dot{x} = a_0 + P_1(x, y) + P_2(x, y) + P_3(x, y) + P_4(x, y), \\ \dot{y} = b_0 + Q_1(x, y) + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + Q_4(x, y), \end{cases} \tag{4}$$

unde $P_i(x,y), Q_i(x,y), i=\overline{1,4}$ sunt polinoame omogene de gradul i, iar coeficienții acestor polinoame sunt parametri arbitrari $P_i(x,y)=\sum_{j=0}^{i} a_{i-j,j}x^{i-j}y^j$, $Q_i(x,y)=\sum_{j=0}^{i} b_{i-j,j}x^{i-j}y^j$, $i=\overline{1,4}$.

Infinitul sistemului (4) se cercetează cu ajutorul uneia din transformărilor Poincaré. De exemplu, efectuând transformarea Poincaré

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{z} \\ y=\dfrac{y}{z} \end{cases}, \tag{5}$$

sistemul (4) se transformă în

$$\begin{cases} \dot{y}=yz^4P\left(\dfrac{1}{z},\dfrac{y}{z}\right)-z^4Q\left(\dfrac{1}{z},\dfrac{y}{z}\right), \\ \dot{z}=z^5P\left(\dfrac{1}{z},\dfrac{y}{z}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Schimbând variabilele $y\to x, z\to y$, vom putea folosi algoritmii dezvoltați în [13]. Pentru a cerceta multiplicitatea dreptei de la infinit, în definiția 2, vom utiliza

$$R=3, v_1=1, v_2=x, v_3=y,$$

$$M_r=\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & P(x,y) & Q(x,y) \\ 0 & \mathbb{X}(P) & \mathbb{X}(Q) \end{pmatrix}.$$

$$\deg(detM_R)=12.$$

Condiționăm ca dreapta $y=0$ a sistemului (6) să fie multiplă. Din acest motiv, polinomul $\det M_R$ trebuie să conțină y^2 ca factor. Polinomul dat poate fi reprezentat sub următoarea formă

$$detM_R=y(A_1(x)+A_2(x)y+A_3(x)y^2+A_4(x)y^3+A_5(x)y^4+A_6(x)y^5+A_7(x)y^6+$$
$$+A_8(x)y^7+A_9(x)y^8+A_{10}(x)y^9+A_{11}(x)y^{10}+A_{12}(x)y^{11}),$$

unde $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_{12}(x)$ sunt polinoame după variabila x, iar $A_i(x)$ reprezintă un polinom în raport cu parametrii sistemului (6).

Remarcăm că pentru ca polinomul $\det M_R$ să conțină y^2, rezultă că aceasta se poate întâmpla dacă și numai dacă se anulează toți coeficienții de pe lângă termenii ce conțin x, adică polinomul $A_1(x)$ va fi identic egal cu zero. Rezolvând ecuațiile $A_1(x)\equiv 0$, ceea ce reprezintă în total 12 ecuații, vom obține 9 soluții, adică există 9 sisteme diferențiale cuartice ce posedă dreapta de la infinit de multiplicitatea doi. Rezolvarea acestor sisteme este extrem de voluminoasă și vom arăta pașii ce au fost parcurși prin următoarea figură:

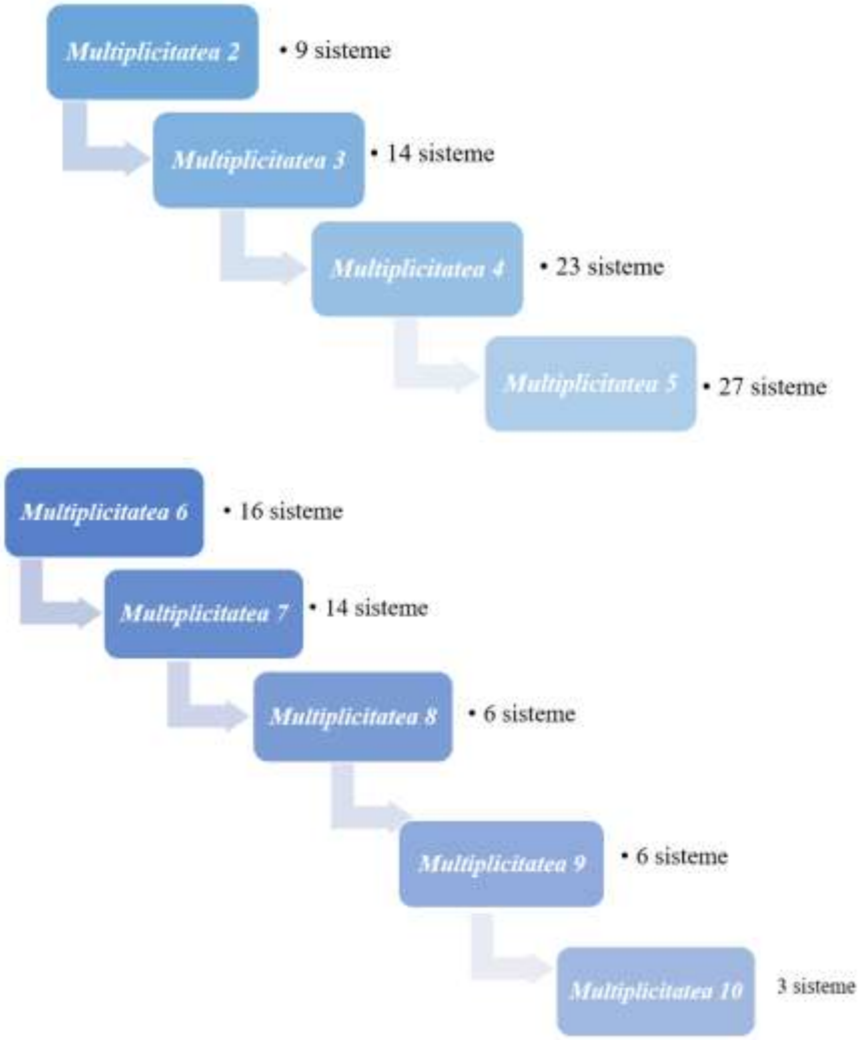

Figura 1. Obținerea sistemelor cuartice cu dreapta invariantă de la infinit multiplă

Observăm că am obținut 3 sisteme de multiplicitatea 10 și, pentru fiecare din ele, cerând $A_{10}(x) \equiv 0$, adică ca dreapta invariantă de la infinit a acestor sisteme diferențiale cuartice să posede multiplicitatea 11, obținem mulțime vidă. Astfel am demonstrat că multiplicitatea maximală a dreptei invariante de la infinit pentru sistemele diferențiale cuartice este egală cu 10.

Bibliografie

1. Llibre J., Xiang Zhang. On the Darboux Integrability of Polynomial Differential Systems. Qual. Theory Dyn. Syst., 2012.
2. Artes J., Grunbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems. Pacific Journal of Mathematics, 1998. 184, No. 2, 207–230.
3. Suo Guangjian, Sun Jifang. The n-degree differential system with (n − 1)(n + 1)/2 straight line solutions has no limit cycles. Proc. of Ordinary Differential Equations and Control Theory, Wuhan, 1987. p. 216–220 (in Chinese).

4. Kooij R. Cubic systems with four line invariants, including complex conjugated lines. Math., Proc. Camb. Phil. Soc., 1995. 118, No. 1, p. 7–19.
5. Cozma D., Șubă A. The solution of the problem of center for cubic differential systems with four invariant straight lines. Mathematical analysis and applications, Iași, 1997. 44, suppl., p. 517–530.
6. Șubă A., Cozma D. Solution of the problem of the center for cubic differential system with three invariant straight lines in generic position. Qualitative Theory of Dynamical Systems, Universitat de Lleida. Spaine, 2005. 6, p. 45–58.
7. Llibre J., Vulpe N. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines. Rocky Mountain J. Math., 2006. 36, No. 4, p. 1301—1373.
8. Bujac C. One new class of cubic systems with maximum number of invariant omitted in the classification of J.Llibre and N.Vulpe. Bul. Acad. Științe Repub. Mold., Mat., 2014. No. 2(75), p. 102-105.
9. Bujac C. Cubic differential systems with invariant lines of total multiplicity eight. doctor thesis in mathematics, 2016, Chișinău, 165 p.
10. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along two directions. Studia Universitatis. Seria Ştiinţe Exacte şi Economice, 2008. no. 8(13), p. 5-16.
11. Puţuntică V., Şubă A. The cubic differential system with six real invariant straight lines along three directions. Bulletin of ASRM. Mathematics, 2009. no. 2(60), p. 111-130.
12. Christopher C., Llibre J., Pereira J. V. Multiplicity of invariant algebraic curves in polynomial vector fields. Pacific Journal of Mathematics, 329, 2007. nr. 1, p. 63-117.
13. Repeşco V., Josan D. Some algorithms for investigating the multiplicity of the invariant line at the infinity for quartic differential systems. Materialele conferinţei ştiinţifice a studenţilor: Ediţia a 69-a / colegiul de redacţie: Coropceanu Eduard [et al.]. – Chişinău : S. n., 2020 (Tipografia UST). 237 p., ISBN 978-9975-76-309-7.