CZU: 519.6:004

SOLUȚIONAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE CU SOFTWARE MATHEMATICA

Vitalie PUȚUNTICĂ, doctor, conferențiar universitar
Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. În această lucrare sunt analizate cele mai des utilizate metode de soluționare numerică a ecuațiilor algebrice: metoda bisecției, metoda coardelor, metoda tangentelor. Pentru simularea metodelor menționate s-a utilizat software Mathematica. În rezultat s-a arătat simplitatea utilizării Mathematica la rezolvarea ecuațiilor algebrice.
Cuvinte cheie: soluție, eroare, bisecție, coardă, tangentă.

Abstract. In this paper the most common methods for numerical solving of algebraic equations are analyzed: the bisection method, the chord method, the tangent method. Mathematica software was used to simulate the mentioned methods. As a result, the simplicity of using Mathematica to solve algebraic equations was shown.
Keywords: solution, error, bisection, chord, tangent.

Introducere

Calculul numeric reprezintă tehnici prin care problemele matematice sunt reformulate astfel încât să fie rezolvate numai prin operații aritmetice. Prin trecerea de la infinit la finit, diferențial la algebric, neliniar la liniar, problemele complicate sunt înlocuite de probleme mai simple care au aceeași sau “aproape” aceeași soluție. Astfel soluțiile obținute prin aplicarea calcului numeric reprezintă doar aproximații ale soluțiilor problemelor originale, și deci implică erori.

Calculul numeric are o istorie lungă și bogată: Arhimede, Newton sau Gauss, spre exemplu, având contribuții semnificative în acest domeniu. Însă calculul numeric modern, așa cum le folosim astăzi, sunt caracterizate de sinergia dintre calculatoarele electronice programabile, analiza matematică, precum și oportunitatea și necesitatea de a rezolva probleme complexe din diverse domenii cum a fi ingineria, medicina, economia sau științele sociale. Deși a existat întotdeauna o strânsă interacțiune între matematică, pe de o parte și științe și tehnologie, pe de altă parte, această interacțiune s-a intensificat în ultimele decenii. Creșterea utilizării calcului numeric a fost cauzată nu numai de creșterea performanței calculatoarelor, ci și de îmbunătățirea algoritmilor. Cu toate că există produse software performante pentru rezolvarea multor probleme matematice întâlnite în practică, cunoașterea și înțelegerea calcului numeric rămân esențial pentru utilizarea inteligentă a produselor software respective.

Această lucrare reprezintă o analiză a calcului numeric ce țin de rezolvarea ecuațiilor algebrice cu o necunoscută folosind softul MATHEMATICA [3].

Localizarea rădăcinilor

Fie ξ una din rădăcinile ecuației $f(x)=0.$ Vom considera că rădăcina ξ este localizată pe segmentul $[a,b],$ dacă ecuația $f(x)=0$ nu conține alte rădăcini pe segmentul menționat. Localizarea rădăcinilor are o importanță deosebită pentru procesul de rezolvare numerică a ecuațiilor neliniare cu o necunoscută.

Pentru localizare a rădăcinilor se utilizează: metoda grafică și metoda analitică [1], [2].

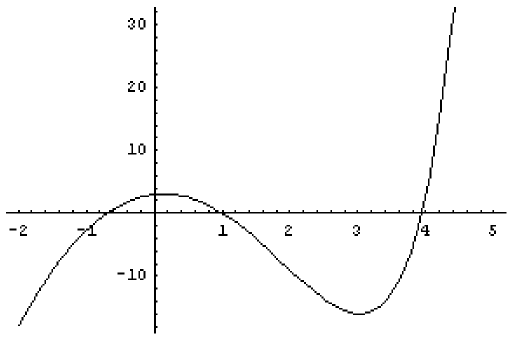
Exemplul 1. Să se construiască grafic și să se alcătuiască un program în Mathematica, pentru a localiza rădăcinile ecuației $3^x-5x^2+2=0$, cu pasul $h=0{,}01.$

Soluție. Construirea grafică și programul de localizare a rădăcinilor va fi:

Localizarea radacinilor.nb *

```
In[1]:=           (* CONSTRUIREA GRAFICA SI LOCALIZAREA RADACINILOR*)

In[2]:= Clear["`*"];
        f[x_] = 3^x - 5 x^2 + 2.;                          (* Definirea functiei *)
        a = -2.; b = 5;                         (* Stabilirea intervalului global *)
        Plot[f[x], {x, a, b}];                           (* Vizualizarea grafica *)
        h = 10^-2;                                      (* Pasul de esantionare *)
        lst = {};                             (* Initializare lista intervalelor *)
        For[x = a - h, x ≤ b + h, x = x + h, yn = f[x + h];
         If[yn yv ≤ 0, AppendTo[lst, {x, x + h}]];     (* Adauga intervalul in lista *)
         yv = yn; (* Noua ordonata devine ordonata veche pentru urmatorul interval*)
        ];
        Print[lst];
```




```
{{-0.71, -0.7}, {0.99, 1.}, {3.93, 3.94}}
```

100%

Metoda bisecției (înjumătățirii)

Una din cele mai simple metode de determinare a unei soluții a ecuației $f(x)=0$ este metoda bisecției.

Fie ecuația $f(x)=0$, unde $f(x)$ este o funcție continuă pe segmentul $[a,b]$ și are o singură rădăcină. Pentru a aproxima rădăcina aflată pe segmentul $[a,b]$, înjumătățim acest segment prin punctul $c=(a+b)/2.$ Dacă $f(c)=0,$ atunci $c=(a+b)/2$ este rădăcină exactă a ecuației, dacă $f(c)\neq 0,$ atunci rădăcina căutată se va afla într-unul din segmentele $[a,c]$ ori $[c,b]$, în dependență de faptul pe care segment funcția ia valori de semn opus la capete. Notăm acest segment prin $[a_1,b_1]$. Astfel avem $f(a_1)<0<f(b_1),$ $a\le a_1<b_1\le b$ și $b_1-a_1=h/2.$

Segmentul $[a_1, b_1]$ iarăşi se împarte în jumătate şi punctul de diviziune se notează prin c_1. Dacă $f(c_1) = 0$, atunci c_1 este rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$. Dacă însă $f(c_1) \neq 0$, notăm prin $[a_2, b_2]$ acela dintre segmentele $[a_1, c_1]$ şi $[c_1, b_1]$, pe care la extremităţi primesc valori de semn diferit. Deci $f(a_2) < 0 < f(b_2)$, $a_1 \le a_2 < b_2 \le b_1$ şi $b_2 - a_2 = h/2^2$. Continuând acest proces, se poate întâmpla că la o anumită etapă determinăm un punct c_k astfel încât $f(c_k) = 0$, adică c_k este rădăcină a ecuaţiei $f(x) = 0$. În caz contrar procesul continuă şi obţinem două şiruri de numere reale (a_n) şi (b_n) astfel încât pentru orice $n \in N$ avem

$$f(a_n) < 0 < f(b_n),\ a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \text{ şi } b_n - a_n = h/2^n < \varepsilon.$$

Prin urmare, şirul (a_n) este crescător şi mărginit superior şi deci este convergent, iar şirul (b_n) este descrescător şi de asemenea este convergent. Astfel în calitate de rădăcină se consideră $\xi = (a_n + b_n)/2$, iar eroarea nu întrece valoarea $\varepsilon = (b_n - a_n)/2$.

Exemplul 2. Aplicând metoda bisecţiei, de alcătuit un program în softul Mathematica ce determină rădăcina ecuaţiei $x^3 + 8x - 6 = 0$ pe intervalul $[0{,}5;1]$ cu precizia $\varepsilon = 0{,}001$.

Soluţie. Programul în Mathematica va fi:

```
Metoda bisectiei.nb *

In[1]:=                    (* METODA BISECTIEI*)

In[2]:= Clear["`*"]; f[x_] = x^3 + 8 x - 6;             (* Ecuatia de rezolvat *)
        a = 0.5; b = 1;             (* Intervalul pe care se afla radacina reala *)
        h = 10^-3;                                          (* Precizia dorita *)
        While[Abs[b - a] > h,         (* Ciclul repetat pina la atingerea preciziei *)
         c = (a + b) / 2.;                                     (* Noua valoare *)
         Print[a, "  ", c, "   ", b, "   ", f[a], "   ", f[c], "  ", f[b]]; (*Extragerea datelor*)
         If[f[a] f[c] > 0, a = c, b = c]           (* Decizia de alegere a intervalului*)
        ]; Print["Radacina ecuatiei ξ=", c];
                                                      (* Extragerea rezultatului *)

        0.5 0.75   1  -1.875   0.421875 3
        0.5 0.625   0.75  -1.875  -0.755859 0.421875
        0.625 0.6875   0.75  -0.755859  -0.175049 0.421875
        0.6875 0.71875   0.75  -0.175049   0.121307 0.421875
        0.6875 0.703125   0.71875  -0.175049  -0.0273857 0.121307
        0.703125 0.710938   0.71875  -0.0273857   0.0468307 0.121307
        0.703125 0.707031   0.710938  -0.0273857   0.00969011 0.0468307
        0.703125 0.705078   0.707031  -0.0273857  -0.00885587 0.00969011
        0.705078 0.706055   0.707031  -0.00885587   0.000415097 0.00969011
        Radacina ecuatiei ξ=0.706055
```

Metoda coardelor

Fie funcţia $f(x)$, care posedă următoarele proprietăţi:

1. $f(x)$ continuă pe segmentul $[a,b]$ şi $f(a) \cdot f(b) < 0$.

2. Pe segmentul $[a,b]$ există $f'(x) \neq 0$; $f''(x) \neq 0$, continue, iar semnul lor pe $[a,b]$ este constant.

Metoda coardelor presupune alegerea în calitate de aproximare a soluției punctul determinat de intersecția dreptei ce trece prin punctele $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$ cu axa Ox.

Pentru realizarea metodei se stabilește extremitatea c a segmentului $[a,b]$ prin care se va duce o serie de coarde (fig. 1). Această extremitate este determinată de condiția $f(c) \cdot f''(c) > 0$. Cealaltă extremitate a segmentului $[a,b]$ se consideră aproximare inițială a soluției: x_0.

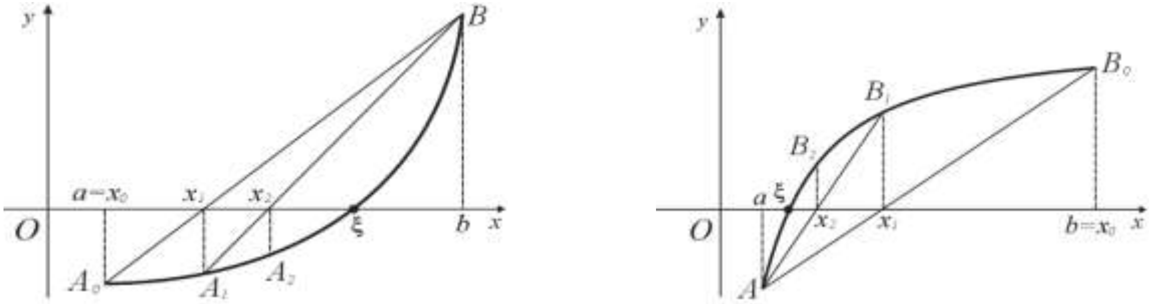


Figura 1. Apropierea succesivă de soluția ecuației prin metoda coardelor

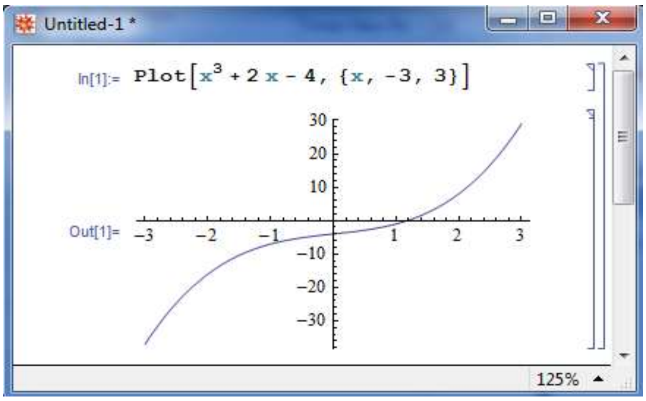
Prin punctele $(c, f(c))$ și $(x_0, f(x_0))$ se construiește o coardă. Se determină punctul în care coarda intersectează axa Ox. Punctul x_1 este considerat următoarea aproximare a soluției.

Procesul se repetă, coarda următoare fiind dusă prin punctele $(c, f(c))$ și $(x_1, f(x_1))$. Astfel se obține șirul de aproximări $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ limita căruia este exact soluția ecuației $f(x) = 0$. Folosind ecuația dreptei ce trece prin două puncte, se deduce formula de recurență [1], [2]:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(c - x_i)}{f(c) - f(x_i)}.$$

Procedeul se oprește atunci când $|\xi - x_i| < |x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$, unde ξ este rădăcina ecuației, iar x_i și x_{i-1} sunt aproximațiile rădăcinii obținute la pasul i și $i-1$, ε este precizia dorită.

Exemplul 3. Să se localizeze, aplicând metoda grafică, rădăcinile ecuației $x^3 + 2x - 4 = 0$ și să se alcătuiască un algoritm în Mathematica ce determină rădăcinile ecuației prin metoda coardelor cu exactitatea $\varepsilon = 0{,}001$.



Soluție. Graficul funcției $f(x) = x^3 + 2x - 4$ construit în Mathematica este reprezentat mai sus. Observăm că ecuația are o soluție localizată $x \in (1;1{,}5)$.

Algoritmul de soluționare în softul Mathematica va fi:

```
Metoda coardei I.nb *

In[1]:=                    (* METODA COARDEI I*)

In[2]:= Clear["`*"];
        f[x_] = x^3 + 2 x - 4;                      (* Definirea functiei *)
        a = 1.; b = 1.5;              (* Intervalul pe care se afla radacina reala *)
        ε = 10^-3;                                   (* Precizia dorita *)
        Nmax = 9;                           (* Numarul iteratiilor arbitrar *)
        If[f[a] f''[a] < 0, {cv = a, cn = b}, {cv = b, cn = a}];
                        (* Valoarea initiala a radacinii, pentru comparatie *)
        For[i = 1, i < Nmax, i++,
          c = cv - ((cv - cn) f[cv])/(f[cv] - f[cn]);   (* Valoarea noua a radacinii *)
          Print[c, "  ", Abs[cv - c]];                   (* Extragerea datelor *)
          If[Abs[cv - c] < ε, Break[] ];        (* Conditia de oprire a ciclului *)
          If[f[cv] f[c] > 0, cv = c, cn = c]   (* Decizia de alegere a intervalului *)
        ];
        Print["Solutia ξ = ", c];
                                                (* Extragerea radacinii *)

1.14815  0.148148
1.17423  0.0260839
1.17863  0.00439502
1.17936  0.000734692
Solutia ξ = 1.17936
```

Metoda tangentelor (Newton)

O altă metodă de rezolvare a ecuațiilor neliniare este metoda tangentelor, cunoscută și sub numele de *metoda Newton*.

Fie funcția $f(x)$, care posedă următoarele proprietăți:

1. $f(x)$ continuă pe segmentul $[a,b]$ și $f(a)\cdot f(b) < 0$.

2. Pe segmentul $[a,b]$ există $f'(x) \neq 0$; $f''(x) \neq 0$, continue, iar semnul lor pe $[a,b]$ este constant.

Metoda Newton presupune trasarea consecutivă a unor tangente la graficul funcției, prima dintre ele fiind construită prin extremitatea (x_0, y_0) a segmentului $[a,b]$, extremitate pentru care se respectă condiția $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$.

Fie că tangenta cu numărul i intersectează axa Ox în punctul x_i. Următoarea tangentă $(i+1)$ va fi trasată prin punctul $(x_i, f(x_i))$ și va intersecta axa Ox în punctul x_{i+1}. Șirul de valori $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ va converge către soluția ecuației $f(x) = 0$.

Pentru a calcula valorile $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ se va utiliza ecuația tangentei la funcția ce trece print-un punct dat. Astfel se obține următoarea formulă de recurență [1], [2]:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Procesul iterativ de calcul poate fi oprit fie după repetarea unui număr prestabilit de ori, fie după atingerea unei exactități cerute.

Eroarea se va estima conform relației:

$$|\xi - x_{i+1}| < \varepsilon.$$

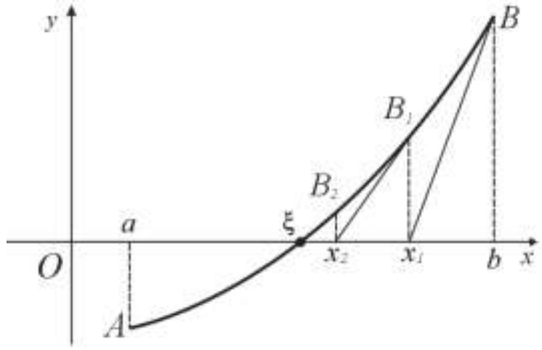


Figura 2. Metoda Newton

Exemplul 4. Folosind metoda Newton, să se alcătuiască un algoritm în Mathematica pentru stabilirea rădăcina ecuației $\cos x - 2x = 0$, știind că rădăcina ξ aparține segmentului $[0;1]$, cu exactitatea $\varepsilon = 0{,}001$.

Soluție. Programul în softul Mathematica, prin metoda Newton, se organizează astfel:

```
Metoda Newton.nb *

In[1]:=                      (* METODA NEWTON *)

In[2]:= Clear["`*"];
        f[x_] = Cos[x] - 2 x;                         (* Definirea functiei *)
        a = 0.; b = 1.;          (* Intervalul pe care se afla radacina reala *)
        ε = 10^-3;                                       (* Precizia dorita *)
        Nmax = 10;                                    (* Conditia de oprire *)
        If[f[a] f''[a] > 0, cv = a, cv = b];          (* Alegerea formulei *)
        For[n = 1, n < Nmax, n++,
          c = cv - f[cv]/f'[cv];              (* Valoarea noua a radacinii *)
          Print[c, "   ", Abs[c - cv]];               (* Extragerea datelor*)
          If[Abs[c - cv] < ε, Break[] ];   (* Conditia de oprire a ciclului *)
          cv = c];                              (* Alegerea noului interval *)
        Print["Solutia ξ = ", c];
                                                (* Extragerea radacinii *)

        0.486288   0.513712
        0.450419   0.0358694
        0.450184   0.000234983
        Solutia ξ = 0.450184

100%
```

Concluzii

Utilizarea unui calcul numeric se face exclusiv prin programarea ei și rularea pe calculator. În lucrarea dată, pentru elementele de analiză numerică abordate, a fost utilizat softul Mathematica. Pentru soluționarea problemei date pot fi utilizate diverse limbaje de programare: Pascal, C etc., dar softul Mathematica este unul simplist și ușor de utilizat.

Bibliografie

1. Gremalschi A., Corlat S., Braicov A. Informatică: Manual pentru clasa a XII-a. Știința, 2015. 347 p.
2. Groza G. Analiza numerică. București: Editura Matrix Rom, 2005.
3. Половко А. М. Mathematica для студентов. Санкт-Петербург, 2007.