CZU: 37.016:51

INTEGRALE PRIME DARBOUX IN SISTEMUL DIFERENȚIAL CUBIC CU DOUĂ DREPTE ȘI O CONICĂ INVARIANTĂ

Dumitru COZMA, dr. hab., profesor universitar
Catedra AMED, Universitatea de Stat din Tiraspol
Olesea BECHET, masterandă, Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. Pentru sistemul diferențial cubic cu punctul de echilibru $O(0,0)$ de tip centru sau focar, care posedă două drepte și o conică invariantă, se determină condițiile de existență a centrului. Prezența centrului în $O(0,0)$ este demonstrată prin construirea integralelor prime de forma Darboux.
Cuvinte-cheie: sistem diferențial cubic, curbă algebrică invariantă, problema centrului, integrabilitatea Darboux.

Abstract. We find conditions for a singular point $O(0,0)$ of a center or a focus type to be a center, in a cubic differential system with two invariant straight lines and one invariant conic. The presence of a center at $O(0,0)$ is proved by constructing Darboux first integrals.
Keywords: cubic differential system, invariant algebraic curve, the problem of the center, Darboux integrability.

1. Problema deosebirii centrului de focar

Fie sistemul cubic de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x,y), \\ \dot{y} = -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

în care coeficienții $a, b, \dots, r, s$ și variabilele $x = x(t), y = y(t)$ sunt reale. Originea de coordonate $O(0,0)$ este pentru sistemul (1) punct de echilibru cu valorile proprii imaginare ($\lambda_{1,2} = \pm i$), adică punct de echilibru de tip centru sau focar.

În lucrarea de față, pentru sistemul diferențial cubic (1) este studiată problema deosebirii punctelor de echilibru de tip centru și focar, numită *problema centrului*. Importanța acestei probleme rezidă în faptul că ea are tangențe cu problema locală a 16-a a lui Hilbert despre ciclurile limită ce pot apărea la bifurcații, problemă nesoluționată până în prezent. Problema centrului pentru sistemul diferențial (1) este echivalentă cu problema integrabilității locale a sistemului în vecinătatea punctului de echilibru $O(0,0)$. Din aceste considerente vom studia metoda algebrică de integrare a sistemelor diferențiale polinomiale, numită *metoda de integrabilitate Darboux* [1].

Definiția 1. Curba algebrică $\Phi(x,y) = 0$, unde $\Phi \in \mathbb{C}[x,y]$, se numește *curbă algebrică invariantă* a sistemului polinomial (1), dacă există un așa polinom $K(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ încât în variabilele x și y are loc identitatea

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} \cdot P(x,y) + \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} \cdot Q(x,y) \equiv \Phi(x,y) \cdot K(x,y). \tag{2}$$

Se spune că sistemul (1) este *integrabil Darboux* dacă el posedă integrală primă de forma

$$\Phi_1^{h_1}\Phi_2^{h_2}\cdots\Phi_m^{h_m} = C, \qquad (3)$$

unde $\Phi_j(x,y) = 0,\ j = 1,\dots,m$ sunt curbe algebrice invariante, iar $h_j \in \mathbb{C}$.
Dacă relația (3) este integrală primă pentru sistemul diferențial (1), unde $\Phi_j(x,y) = 0$ sunt curbe algebrice, atunci aceste curbe sunt și curbe invariante pentru sistemul (1).

2. Sistemul diferențial cubic cu drepte invariante

Problema deosebirii centrului de focar a fost rezolvată pentru sistemul cubic (1) ce posedă: patru drepte invariante, trei drepte invariante, două drepte invariante și o conică invariantă ireductibilă [1]. Condițiile de existență a două drepte invariante

$$1 + Ax + By = 0,\ (A,B) \neq 0,\ A,B \in \mathbb{C} \qquad (4)$$

au fost obținute în lucrarea [2] și a fost demonstrată următoarea teoremă:

Teorema 1. Sistemul diferențial cubic (1) are două drepte invariante de forma (4) dacă și numai dacă se realizează unul dintre următoarele două seturi de condiții:

(i) $a = f = k = p = r = 0,\ m(c^2 - 4m) \neq 0$;

(ii) $k = g + (a-1)(a_1 + a_2),\ s = (1-a)a_1a_2,\ r = -f - 1,\ l = -b,$
$m = d - a + 2 + c(a_1 + a_2) - a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2,\ n = -d - 1 - (f+2)a_1a_2,$
$p = b - c + (f+2)(a_1 + a_2),\ q = (a_1 + a_2 - c)a_1a_2 - g.$

În cazul (i) dreptele invariante sunt paralele și au forma

$$1 + \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4m}}{2}x = 0, \qquad (5)$$

iar în cazul (ii) dreptele invariante sunt concurente în punctul (0; 1) și au forma

$$1 + a_1x - y = 0, 1 + a_2x - y = 0,\ a_1 - a_2 \neq 0,\ a_1, a_2 \in \mathbb{C}. \qquad (6)$$

În lucrarea de față sunt determinate condițiile de existență a centrului pentru sistemul cubic (1) prin construirea integralelor prime de forma Darboux, constituite din două drepte invariante și o conică invariantă ireductibilă.

3. Sistemul diferențial cubic cu integrale prime Darboux

Vom determina condițiile asupra coeficienților sistemului (1) încât acest sistem să posede integrală primă de forma Darboux

$$F(x,y) \equiv l_1^{h_1} l_2^{h_2} \Phi^{h_3} = C, \qquad (7)$$

unde $l_1 = 0, l_2 = 0$ sunt drepte invariante de forma (5) sau (6),

$$\Phi(x,y) \equiv a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + 1 = 0$$

este o conică invariantă ireductibilă, iar $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{C}$.

Conform [1], relația (7) este integrală primă pentru sistemul (1) dacă și numai dacă se îndeplinește următoarea identitate

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \cdot P(x,y) + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \cdot Q(x,y) \equiv 0. \qquad (8)$$

Egalând coeficienții de pe lângă aceleași puteri a monoamele $x^i y^j$ in (8), vom obține un sistem din 14 ecuații

$$\{U_{ij} = 0,\ i + j = 1,2,3,4\} \tag{9}$$

în raport cu coeficienții conicei $a_{20},\ a_{11},\ a_{02},\ a_{10},\ a_{01}$, coeficienții dreptelor invariante a_1, a_2, exponenții $h_1, h_2,\ h_3$ și coeficienții $a, b, \ldots, s$ ai sistemului (1).

Se studiază compatibilitatea sistemului de ecuații algebrice (9) și pentru sistemul cubic (1) se obțin condițiile de existență a integralelor prime de forma Darboux, formate din două drepte invariante și o conică invariantă ireductibilă.

Teorema 2. Sistemul diferențial cubic (1) are integrală primă de forma Darboux (7), compusă din două drepte invariante $l_1 = 0, l_2 = 0$ și o conică invariantă ireductibilă $\Phi = 0$ dacă se realizează unul dintre următoarele zece seturi de condiții:

(i) $a = v + 1, b = \dfrac{2u^2 - cuv - 2v^2 - 2v^3}{2uv}, d = 2v, f = -2, l = -b,$

$$m = \frac{2v^6 + 2v^5 - cuv^4 + (2u^2 - 2gu)v^3 + u^2v^2 + cu^3v - u^4}{u^2v^2},$$

$$p = \frac{2u^2 - 2v^2 - 3cuv - 2v^3}{2uv}, q = \frac{cuv + gu - u^2 - 2v^2 - 2v^3}{u}, r = 1,$$

$$n = -2v - 1, s = \frac{v^2(cuv + 2gu - u^2 - 2v^2 - 2v^3)}{u^2}, k = g - u + cv;$$

(ii) $d = 2a - 3, f = -\dfrac{3}{2}, g = 2(1 - a)(b + c), p = \dfrac{2b - c}{2}, q = -g, r = \dfrac{1}{2}, l = -b,$

$$k = (1 - a)(2b + c), s = 2(2a^2 + an - 4a - n + 2), m = 3 - 3a - 2n;$$

(iii) $a = 1, d = -2, f = -1, k = p = g, l = -b, m = -n, q = -g, r = s = 0;$

(iv) $b = l = 0, f = -r - 1, d = 2a - v - 4, g = \dfrac{2c(a - 1)}{v}, p = \dfrac{c(u + v)}{2},$

$$k = \frac{c(av + 2a - v - 2)}{v}, m = \frac{au + 2av + 2a - uv - 2u - v^2 - 3v - 2}{u},$$

$$n = \frac{v^3 + (5 + u - 2a)v^2 + (8 + 5u - 6a - 2au)v + (8 - 6a)u + 4 - 4a}{2u},$$

$$q = \frac{2c(1 - a)}{v}, r = \frac{-u - v}{2}, s = \frac{(a - 1)v^2 + (5a - 2a^2 - 3)v - 2(a - 1)^2}{u};$$

(v) $g = [2v^3(a - 1)(c - 2b) + v^2b(5au + 8a + 4b^2 - 2bc - u^2 - 6u - 8) +$

$$vb^2(u + 2)(c - 6b) + 2b^3(u + 2)^2]/(uv^3),$$

$$k = [v^3(u + 2)(c - 2b)(a - 1) + vb^2(u + 2)(c - 6b) +$$
$$+bv^2(au^2 + 7au + 8a + 4b^2 - 2bc - 2(u + 2)^2) + 2b^3(u + 2)^2]/(uv^3),$$

$$m = [2v^3(4b^2 - 2bc - a + u + 2) + v^2(4bcu + 10bc - 28b^2 - 12b^2u - au -$$
$$-u - 2) + vb(6b - c)(u + 2)(u + 3) - b^2(u + 4)(u + 2)^2]/[v^2(u - 2v + 2)],$$

$$n = [v^2(4b^2 - 2bc - u^2 + 2au + 6a - 5u - 8) + 2b^2(u + 2)^2 -$$
$$-v(u + 2)(6b^2 - bc + 2a - u - 3)]/\ [v(u - 2v + 2)],$$

$$l = -b, p = bu - 2bv + 3b + cv - c, r = 1 - v, v = f + 2, u = 2a - d - 4,$$

$$q = [2v^3(a-1)(2b-c) + vb^2(6b-c)(u+1)(u+2) - 2b^3(u+1)(u+2)^2 + $$
$$+v^2b(u^3+4u^2+8u+8-(2u^2+7u+8)a+2b(u+1)(c-2b))]\ (uv^3),$$
$$s = [(a-1)(v^2(2u+2a+4b^2-2bc-u^2-3u-2)+2b^2(u+2)^2 +$$
$$+bv(cu+2c-6bu-12b))]/\ [v^2(u-2v+2)];$$

(vi) $b = l = 0,\ f = -2,\ n = -d-1,\ p = -c, s = (a-1)(d+2),$

$$g = \frac{(1-d-3a)(2a+d+2m+2)+2c^2(a-1)}{c(2a-d-4)}, r = 1,$$
$$q = \frac{(2ad+7a-d^2-5d-9)(2a+d+2m+2)-2c^2(a-1)}{c(2a-d-4)},$$
$$k = \frac{(ad-2a^2+3a-2d+3)(2a+d+2m+2)+c^2(a-1)(2a-d-2)}{c(2a-d-4)},$$
$$2(2a+d+2m+2)^2 - c^2(2a+d+2m+2) - c^2(d+2) = 0;$$

(vii) $b = l = 0,\ f = -2,\ n = -d-1,\ p = -c,\ r = 1,$

$$a = \frac{(2a_1+a_2-c)(c-a_1-2a_2)-a_{02}(a_1a_2-1)+a_{02}^2}{2a_{02}},$$
$$g = \frac{a_{02}(3a_1+3a_2-c)+a_1a_2(3c-5a_1-5a_2)+c-3a_1-3a_2}{2(a_{02}-1)} +$$
$$+\frac{(3a_1+3a_2-c)(2a_1+a_2-c)(c-a_1-2a_2)}{2a_{02}(a_{02}-1)},$$
$$d = \frac{(2a_1+a_2-c)(c-a_1-2a_2)-a_{02}(2+a_1a_2)}{a_{02}},\ \ s = (1-a)a_1a_2,$$
$$k = g + (a-1)(a_1+a_2),\ q = (a_1+a_2-c)a_1a_2 - g,$$
$$m = d - a + 2 + c(a_1+a_2) - a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2\ ;$$

(viii) $a = f = k = p = r = d = l = q = s = 0,\ c = -2b,\ g = -b,\ n = -m;$

(ix) $a = f = k = p = r = d = l = q = 0,\ g = b + c,\ m = (c^2-u^2)/4,$

$$4b^2(2b+3c) + b(u^2+3c^2-12n) - 4cn = 0;$$

(x) $a = f = k = p = r = d = l = q = 0,\ m = (c^2-u^2)/4,$

$$(c^2-u^2+4n-4s)[4b^2(2b+3c)+b(u^2+3c^2-12n)-4cn] +$$
$$+4(g-b-c)[(2b^2+bc-n)(c^2-u^2+4n)] = 0.$$

Condițiile (i) – (x) au fost obținute pentru sistemul diferențial (1) și în lucrarea [1] utilizând mai multe etape: găsirea condițiile de existență a două drepte invariante și a unei conice invariante ireductibile (89 de cazuri), calcularea și anularea mărimilor Lyapunov, studierea integrabilității sistemului (1).

Bibliografie

1. Cozma D. Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics. Chișinău: Știința, 2013. 240 p.
2. Cozma D. Darboux integrability and rational reversibility in cubic systems with two invariant straight lines. In: E. J. of Diff. Equations, 2013, Vol. 2013, no. 23, p. 1–19.