Ministerul Educației al Republicii Moldova

Universitatea Pedagogică de Stat "Ion Creangă"

Sergiu Port

Culegere de probleme la geometria constructivă

Chişinău 2010

Cuprins

Geometria euclidiană este cea mai veche formalizare a geometriei, şi în acelaşi timp cea mai familiară şi mai folosită în viața de zi cu zi. Aşa după cum indică şi adjectivul euclidiană, aceasta a fost enunțată prima dată de către gânditorul Euclid, din Grecia antică, în secolul al IV-lea î.Hr..

Geometria euclidiană este un ansamblu de leme, corolare, teoreme şi demonstrații, care foloseşte doar patru noțiuni fundamentale: punct, dreaptă, plan şi spațiu, şi care se bazează pe următoarele cinci axiome, enunțate de Euclid în cartea sa Elementele:

1. Prin oricare două puncte neconfundate trece o dreaptă şi numai una;
2. Orice segment de dreaptă poate fi extins la infinit (sub forma unei drepte);
3. Dat fiind un segment de dreaptă, se poate construi un cerc cu centrul la unul din capetele segmentului şi care are segmentul drept rază;
4. Toate unghiurile drepte sunt congruente;
5. Printr-un punct exterior unei drepte se poate trasa o singură paralelă la acea dreaptă.

În geometria euclidiană, trei puncte necoliniare determină un plan şi numai unul, iar patru puncte necoplanare determină un spațiu. În această culegere de probleme construcțiile geometrice ce vor fi studiate se vor afla în plan.

Construcțiile geometrice sînt întâlnite în tot parcursul de matematică din şcoală, începînd cu şcoala primară şi pînă la liceu. În cadrul specialităților de matematică de la universități este un curs special de geometrie constructivă.

Obiectul studiat de geometria constructivă (euclidiană), este însăşi construcția unei figuri geometrice cu ajutorul instrumentelor date. În acest sens există următoarele instrumente:

1. Rigla unilaterală;
2. Compasul;
3. Rigla bilaterală;
4. Rigla cu însemnări;
5. Echerul;
6. Raportorul;
7. Pantograful;
8. Inversorul.

În cursul dat, vom folosi aşa – numitul *set de bază* din instrumentele de mai sus, adică:

- Rigla unilaterală;
- Compasul.

Geometria constructivă operează cu următoarele axiome:

Axiomele geometriei constructive:

Orice figură dată este şi construită. Planul de bază este întotdeauna şi construit.

Reuniunea, intersecția şi diferența a două figuri construite este de asemenea o figură construită, cu excepția cazurilor mulțimii vide.

Dacă figura este construită, atunci putem construi un punct ce aparține acestei figuri, cît şi punct ce nu aparține acestei figuri (considerînd că figura dată nu este însuşi planul de bază).

Axiomele riglei:

- Cu ajutorul riglei poate fi construit segmentul unind două puncte date (construite).
- Cu ajutorul riglei poate fi construită o dreaptă ce trece prin două puncte date.

Axiomele compasului:

- Cu ajutorul compasului poate fi construit un cerc dacă este dat punctul, adică centrul cercului, şi un segment ce serveşte drept rază a cercului.
- Cu ajutorul compasului poate fi construit un arc din cercul dat (construit).

Notațiile folosite în geometria constructivă sînt următoarele:
Punctele: literele mari ale alfabetului latin ;
Segmentele: literele mici ale alfabetului latin, sau 2 litere mari ale alfabetului, marcînd extremitățile segmentului, încadrate în paranteze pătrate.
Dreapta: literele mici ale alfabetului latin(a, b, c...z), sau 2 litere mari ale alfabetului, încadrate în paranteze rotunde.
Unghiurile: ($<ABC$) sau α, β sau $(\widehat{a,b})$.
Cercul: $\omega(O, R)$ – cercul cu centrul în punctul O de raza R.

§1. Probleme elementare

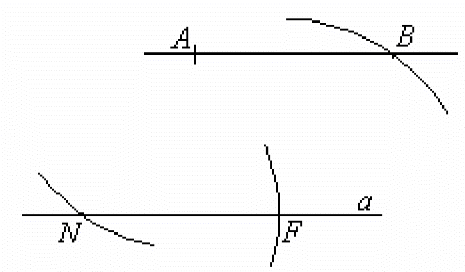
Probleme rezolvate:

Exemplul I:

Să se construiască dreapta paralelă la dreapta dată a prin punctul dat A (punctul nu aparține dreptei date).

Construcția

1. $N \in a$
2. $\omega_1(N,[NA])$
3. $F = \omega_1 \cap a$
4. $\omega_2(A,[NA])$
5. $\omega_3(F, [NA])$
6. $B = \omega_2 \cap \omega_3 : B \neq A$



$(AB) \parallel a$

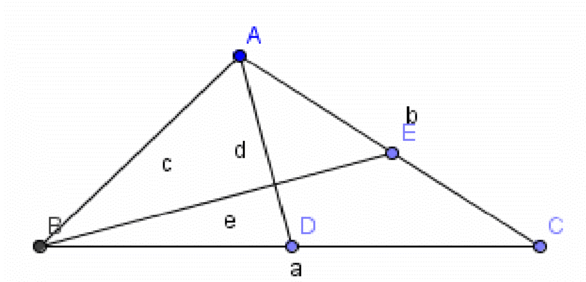
Demonstrație

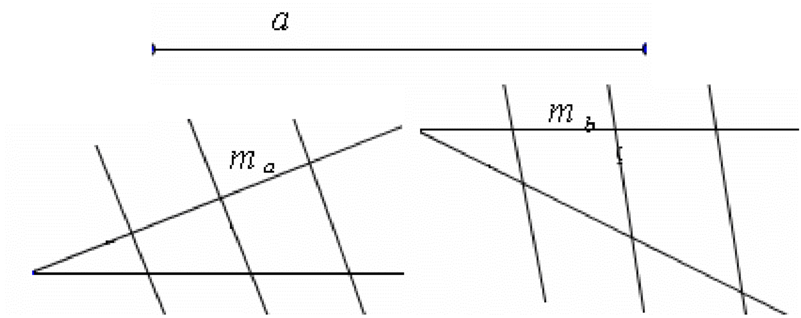
Conform construcției, $ABFN$ este romb. Laturile opuse în romb sunt paralele, de aici rezultă că $(AB) \parallel a$.

Exemplul II:

Să se construiască un triunghi după latura a, mediana m_a și mediana m_b.

Analiza:





$$BO=\frac{2}{3}m_b,\quad DO=\frac{1}{3}m_a,\quad BD=\frac{1}{2}a$$

Triunghiul $\Delta\ BOD$ poate fi construit după trei laturi, iar ΔABC-conform proprietății medianelor.

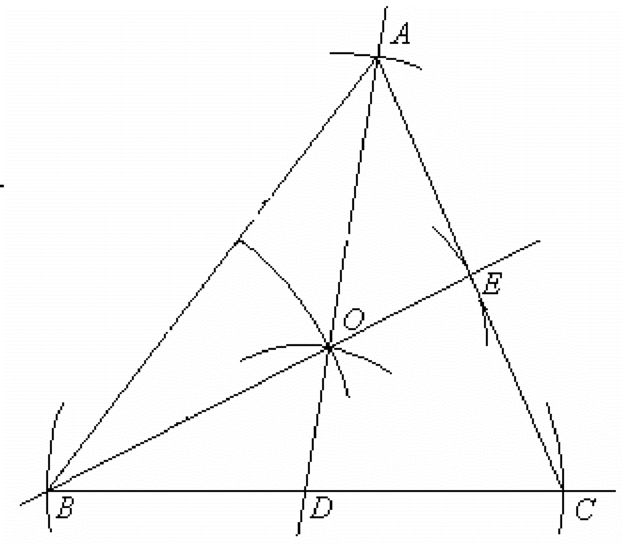
Construcția

1. $\Delta BOD:[BO]=\frac{2}{3}m_b;\ [DO]=\frac{1}{3}m_a\ [BD]=\frac{1}{2}a;$
2. $[AD]=m_a$:O∈[AD]
3. $[BE]=m_b$:
   O∈[BE]
4. $[AE)\cap[BD)=C$
5. $[AB]$

ΔABC-construit

Demonstrație

Demonstrația rezultă din analiză.

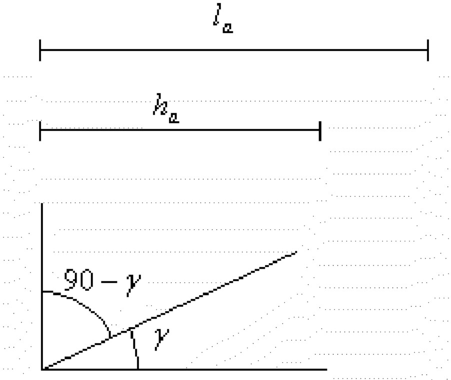


Cercetare

Pentru $\frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_a > \frac{1}{2}a$ - problema este soluționată. În caz contrar nu există soluție.

Exemplul III:

Construiți triunghiul după bisectoarea şi înălțimea dusă din unul şi acelaşi vîrf şi unghiul de la alt vîrf: l_a , h_a , γ .



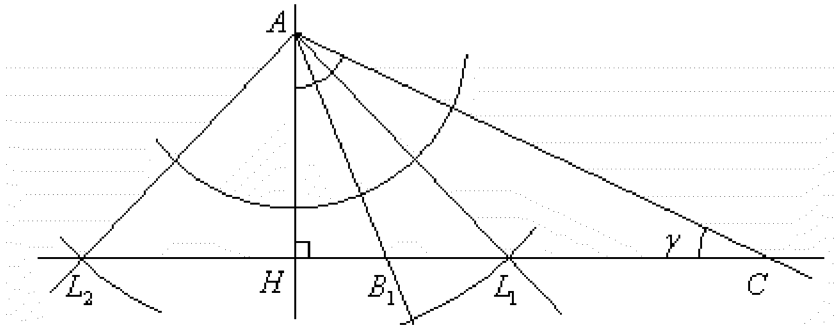
Analiza

Construcția se reduce la construcția ΔAHC, după cateta HA şi un unghi γ, şi folosind proprietatea bisectoarei poate fi construit Δ –ul precăutat

Construcția

1. ΔAHC: $\angle AHC = 90^0$; $[AH] = h_a$; $\angle CAH = 90^0 - \gamma$
2. $\omega_1(A, l_a)$
3. $\omega_1 \cap (HC) = \{L_1, L_2\}$
4. $\angle CAL_1 = \angle L_1AB_1 : B_1 \in (HC)$

ΔCAB_1 - construit



Demonstrație

Conform construcției $\angle ACH = \gamma$, deoarece $\angle MAC = 90^0 - \gamma$. Din construcție $[AH] = h_a$ şi bisectoarea $[AL_1] = l_a$, deoarece l_a - bisectoare $\Rightarrow \angle LAC = \angle LAB$.

Cercetare

Dacă $l_a \geq h_a$ şi $\gamma < 90^0$ problema este rezolvabilă. Deoarece $\angle L_2AC \geq 90^0$ rezultă că $\angle B_2AC \geq 180^0$ şi de aici rezultă că al doilea triunghi nu există. Dacă pentru cazul $h_a = l_a \Rightarrow$ obținem un singur triunghi isoscel. În restul cazurilor problema nu este soluționată.

Probleme propuse:

1. Prin punctul ***P*** să se ducă o paralelă la dreapta ***d***.
2. Prin punctul ***M*** să se ducă o dreaptă d la egală distanță de punctele ***A*** şi ***B***.
3. Să se construiască o dreaptă egal depărtată de punctele ***A***, ***B*** şi ***C***.
4. Prin punctul ***P*** să se ducă o dreaptă *d* cunoscînd suma distanțelor la ea de la punctele ***A***, ***B***, ***C***.

5. Să se construiască o dreaptă ***a*** la distanța ***d*** de dreapta ***b***.
6. Prin punctul ***P*** să se ducă o dreaptă care să taie laturile unghiului ***xOy*** în ***A*** şi ***B***, astfel ***OA***=***OB***.
7. Două drepte ***a*** şi ***b*** sunt intersectate de a treia dreaptă ***c*** . Să se construiască un segment egal cu segmentul dat ***m***, astfel încît el să fie paralel cu dreapta ***c***, iar extremitățile să se afle pe dreptele ***a*** şi ***b***.
8. Să se construiască un triunghi după cele trei laturi date: ***a***,***b***,***c***.

Construiți un triunghi după o latură şi două unghiuri ale ei: ***a***, ***α***, ***β*** Din punctul A să se ducă perpendiculara AB pe dreata d.

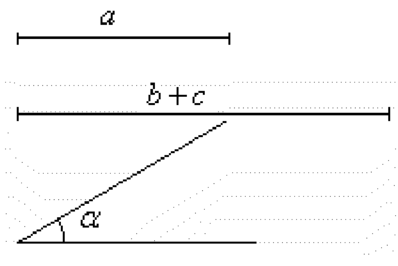
§2. Metoda intersecțiilor

Această metodă constă în următoarele : în cadrul analizei reducem problema la construirea unui singur punct, apoi evidențiem proprietățile acestui punct, în final construim locul geometric al punctelor cu aceste proprietăți. Punctul de intersecție a locurilor geometrice a punctelor construite v-a fi punctul căutat.

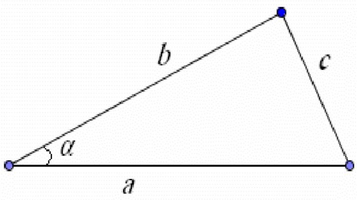
Probleme rezolvate:

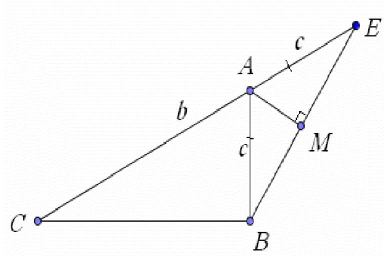
Exemplul I:

Construiți un triunghi după latura a, unghiul α şi suma laturilor $c+b$.



Analiza

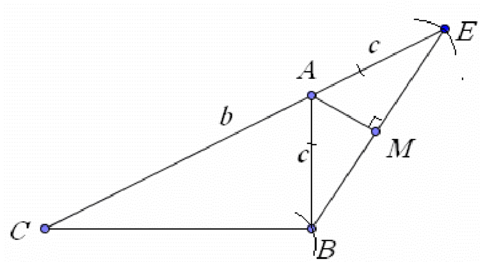




Problema se reduce la construcția ΔCEB ştiind două laturi şi unghiul dintre ele. Apoi vîrful A se află la intersecția mediatoarei laturii BE.

Construcția

1. ΔCEB: $[CE]=b+c$, $[CB]=a$, $\angle ECB=\alpha$
2. m-mediatoarea lui BE
3. $A=m\cap[AE]$
4. $[CB]$



ΔABC- construit

Demonstrație

Din construcție $[CB]=a$, $\angle ACB=\alpha$.
Din ΔBAE- isoscel $\Rightarrow [BA]=[AE]$ şi deci $b+c=[CE]$, iar $[CE]=[CA]+[CE]$ şi deoarece $[AE]=[AB]$ $\Rightarrow b+c=[CA]+[AB]$

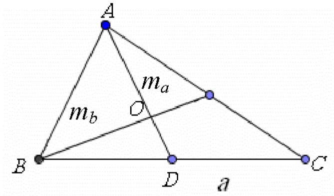
Cercetare

1. Dacă $b+c>a$, atunci există un singur triunghi
2. Dacă $b+c<a$, atunci nu există nici un triunghi.

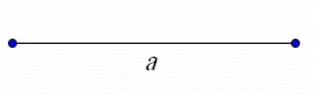
Exemplul II:

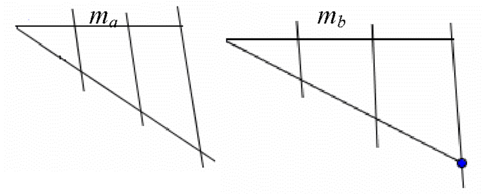
Să se construiască un triunghi după latura a, mediana m_a şi mediana m_b.

Analiza



$$BO=\frac{2}{3}m_b,\quad DO=\frac{1}{3}m_a,\quad BD=\frac{1}{3}a$$





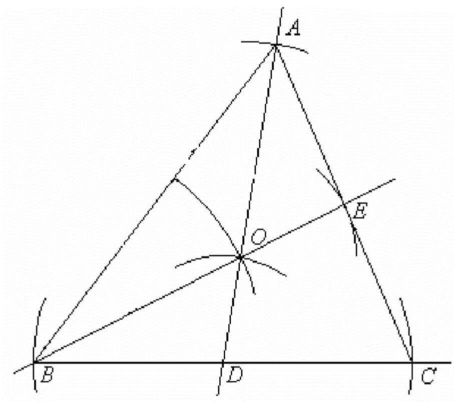
Construcţia

1. $\Delta BOD:[BO]=\frac{2}{3}m_b;\quad [DO]=\frac{1}{3}m_a$

$$[BD]=\frac{1}{2}a;$$

2. $[AD]=m_a$: $A\in[DO)$
3. $[BE]=m_b$: $E\in[BO)$
4. $[AE)\cap[BD)=C$
5. $[AB]$

ΔABC- construit



Demonstraţie

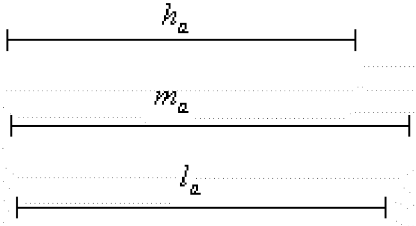
Demonstraţia rezultă din analiză.

Cercetare

Pentru $\frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_a > \frac{1}{2}a$ - problema este soluționată. În caz contrar nu există soluție.

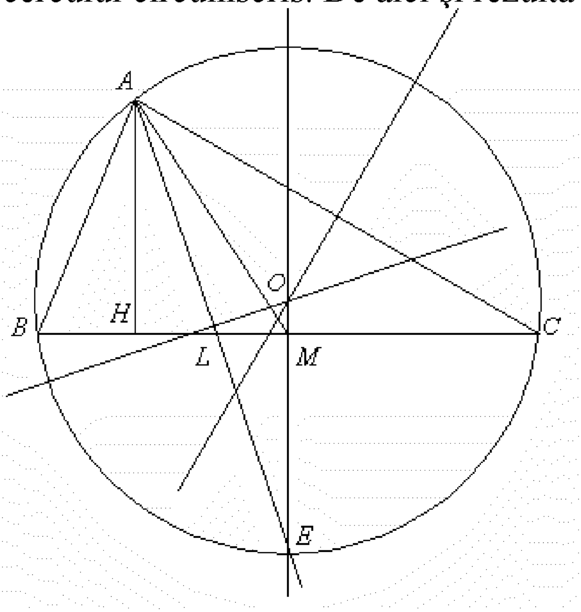
<u>Exemplul III:</u>

Să se construiască un triunghi după mediana, bisectoarea şi înălțimea din unul şi acelaşi vîrf: m_a, h_a, l_a.

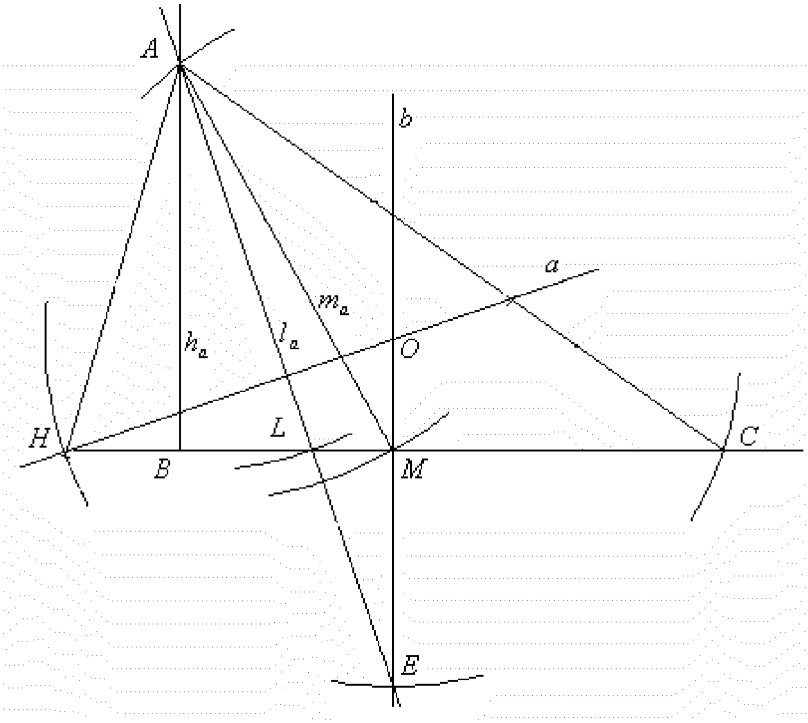


Analiza

Fie ω este cercul circumscris triunghiului. Bisectoarea l_a fiind prelungită intersectează cercul în punctul E.
Punctul E este punct de intersecție şi a mediatoarei laturii BC cu ω. AE este o coardă a lui ω. Deci mediatoarea coardei AE în intersecție cu mediatoarea laturii BC ne reprezintă centrul cercului circumscris. De aici şi rezultă construcția.



Construcția



1. ΔAHM: $\angle AHM = 90^0$; $[AH] = h_a$; $[AM] = m_a$
2. $[AL] = l_a : L \in [HM]$
3. $b \perp (HM) : M \in b$
4. $E = b \cap [AL)$
5. a - *mediatoarea* $[AE)$
6. $O = a \cap b$
7. $\{B, C\} = \omega \cap (HM)$

ΔABC- construit

Demonstrație

Din construcție HA - înălțime $([AH] = h_a)$. Arcul $BE = EC \Rightarrow$ unghiurile înscrise în cercul ω ce se sprijină pe aceste arcuri sunt egale. Deci şi unghiul $\angle BAE = \angle EAC$, adică AE - bisectoarea $\angle BAC$.

Punctul $L \in$ bisectoarei, iar din construcție $[AL] = l_a$. Deci $[AL]$ - bisectoarea triunghiului. M - mijlocul lui $[BC]$, deoarece b - mediatoarea segmentului $[BC]$ trece prin punctul E , iar $[AM] = m_a$ din construcție. Deci $[AM]$ mediana acestui triunghi.

Cercetare

În cazul cînd $h_a < l_a < m_a$ poate fi construit un triunghi. Dacă $h_a = l_a = m_a$ există o infinitate de astfel de triunghiuri isoscele. În caz contrar nu există nici un triunghi.

Probleme propuse:

1. Construiți triunghiul după latura a, mediana m_a si înălțimea h_a.
2. Să se construiască un triunghi după latura a, înălțimea dusă pe aceasta latură h_a si unghiul α (orice unghi) opus laturii a.
3. Construiți un triunghi după latura a, unghiul α şi diferența laturilor b-c $(b>c)$.
4. Construiți un triunghi după două unghiuri α şi β şi perimetrul p.
5. Construiți un triunghi după cele 3 mediane m_a, m_b, m_c.
6. Două drepte a şi b sunt intersectate de a treia dreaptă c . Să se construiască un segment egal cu segmentul dat m,

astfel încît el să fie paralel cu dreapta c, iar extremitățile să se afle pe dreptele a şi b.

7. Construiți triunghiul după o latura a şi două mediane m_b şi m_c.

8. Construiți o dreaptă paralelă la baza triunghiului dat, astfel încît segmentul dreptei cuprins între laturile triunghiului să fie egal cu suma segmentelor tăiate de dreaptă pe laturile laterale ale triunghiului socotind de la bază.

9. Se dă a, h_a si raportul k al medianelor m_b , m_c . Să se construiască triunghiul.

10. Sa se construiască triunghiul cînd se cunosc a, r si b-c .

11. Să se construiască triunghiul ABC in care se cunoaşte a, A si suma h_b+h_c a înălțimilor BH , CH .

12. Construiți un romb după diagonala mică egala cu a , şi egală cu latura rombului.

13. Să se construiască un triunghi după înălțimile laturilor: h_a , h_b , h_c .

14. Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd latura c, înălțimea h_b şi unghiul α format de această înălțime cu bisectoarea unghiului C.

§3. Construcția tangentelor

La construcția tangentelor vom ține cont de proprietatea că tangenta dusă la un cerc, este perpendiculară razei duse la acel punct de tangență.

De asemenea vom folosi proprietatea unghiului drept înscris in cerc, adică, unghiul drept se sprijină pe diametru.

Probleme rezolvate:

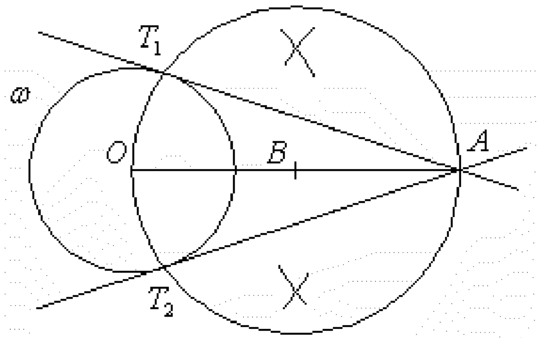
Exemplul I:

Să se construiască tangenta din punctul dat A la cercul dat $\boldsymbol{\omega}(O,R)$.

Construcția

1. $B \in [OA] : [BO] = [BA]$
2. $\omega_1(B[BO])$
3. $\{T_1, T_2\} = \omega \cap \omega_1$

(AT_1) și (AT_2) - tangente



Demonstrație

$\angle AOT_1$ este înscris în cercul $\omega_1(B,OB)$ și se sprijină pe diametrul lui [AO], deci $\angle AOT_1$ este drept. Deoarece $[OT_1]$ este raza cercului $\omega(O,R)$ și $(OM) \perp (AM) \Rightarrow (AM)$ este tangentă.

Cercetare

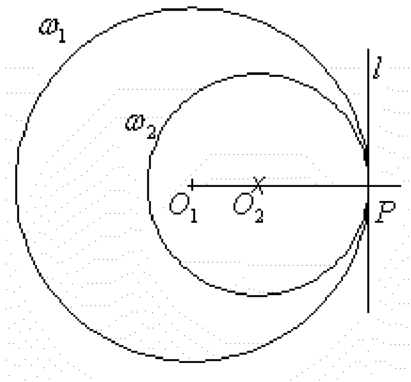
Dacă punctul $A \notin$ discului $\Rightarrow$ obținem două tangente simetrice față de OA (cazul construit). Dacă punctul $A \in \omega$

$\Rightarrow$obținem o singură tangentă. Dacă punctul A se află în interiorul cercului atunci nu putem construi tangentă la cercul dat.

Exemplul II:

Să se construiască tangentele la două cercuri $\omega_1(O_1,R_1)$, $\omega_2(O_2,R_2)$ ce au doar o tangentă în interior.

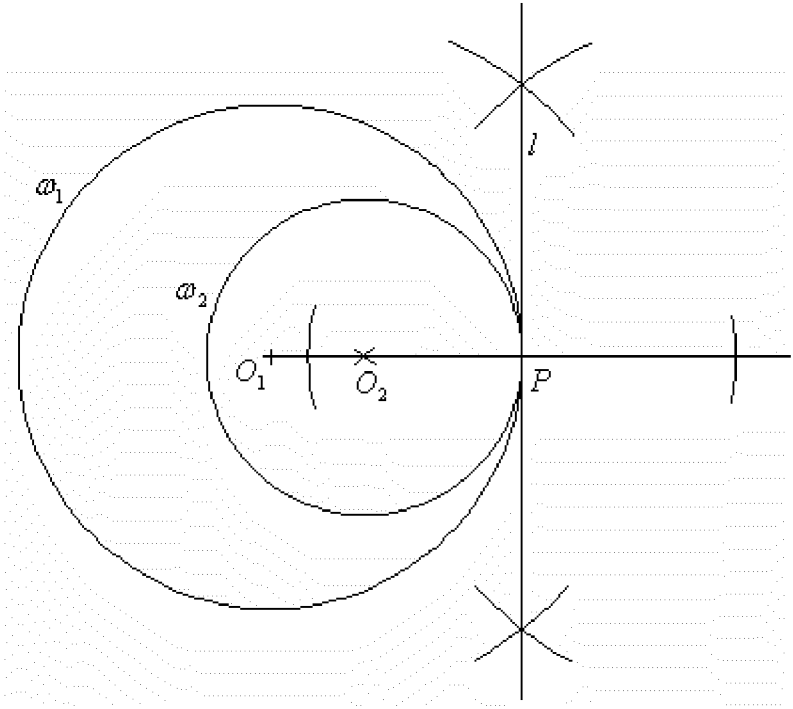
Analiza



Construcția

1. P= $\omega_1 \cap \omega_2$
2. $l \perp (O_1O_2)$:P€l

$l -$tangentă la ω_1 și ω_2



Cercetare

Problema are soluții pentru orice două cercuri din cazul problemei date.

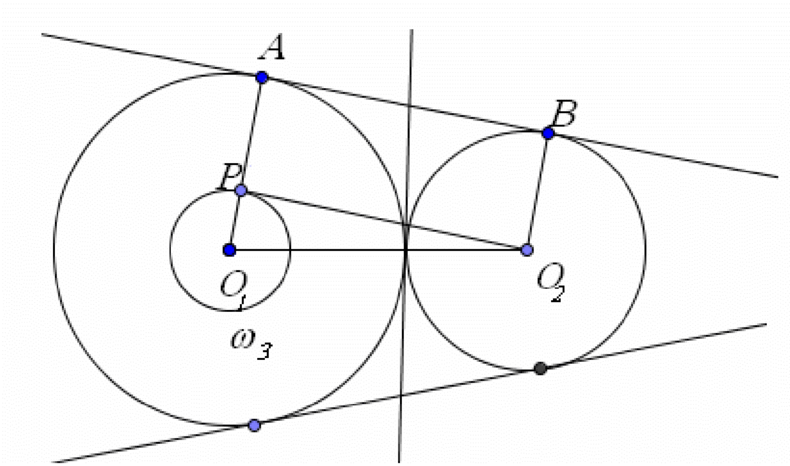
Exemplul III:

Să se construiască tangentele la două cercuri $\boldsymbol{\omega_1(O_1R_1)}$ $\boldsymbol{\omega_2(O_2R_2)}$ tangente exterior. ($R_1>R_2$)

Analiza

Fie *(AB)*- tangenta comună externă. Fixăm punctul *P* pe *[O₁A]* încît *ABO₁P*-dreptunghi. În acest caz $[PO_1]=R_1-R_2$, iar $<O_2PO_1=90^0$.

Construcția se reduce la construcția tangentei (O_2P) la $\omega_3(O_1,O_1P)$.



Construcția

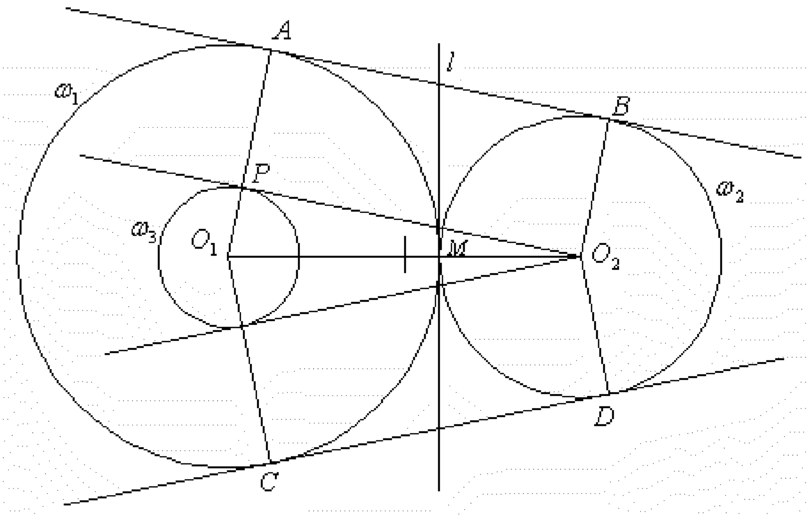
1. $\omega_3(O_1;R_1\text{-}R_2)$
2. (O_2P)- tangentă la ω_3: $P \in \omega_3$
3. $A = [O_1P] \cap \omega_1$
4. $(AB) \parallel (PO_2)$: $B \in \omega_2$

(AB)- tangentă exterioară

5. $M = \omega_1 \cap \omega_2$
6. $l \perp (O_1O_2)$: $M \in l$

---

l - tangentă comună interioară



Demonstrație

Din construcție $PABO_2$ - dreptunghi $\Rightarrow AB \perp BO_2$ şi $AB \perp AO_1$,deci AB - tangentă la ambele cercuri.

Cercetare

Pentru orice două cercuri din acest caz problema este soluționată.

Probleme propuse:

1. Prin punctul ***A*** să se ducă un cerc tangent dreptei ***d*** si cercului ***ω(O,R)***.
2. Să se construiască un cerc $\boldsymbol{\omega_3}$ tangent la cercurile $\boldsymbol{\omega_1}$, $\boldsymbol{\omega_2}$ şi la dreapta ***d***.
3. Prin punctul ***A*** să se ducă un cerc tangent la două cercuri date.
4. Să se construiască un cerc ***B*** de rază ***R*** care să taie cercul *A* şi dreapta ***d***, respectiv sub unghiurile $\boldsymbol{\alpha}$ şi $\boldsymbol{\beta}$.
5. Să se construiască un triunghi cînd se cunosc *R*,

bisectoarea interioară l_a şi unghiul α pe care-l face bisectoarea interioară AL cu AH .

6. Să se construiască un triunghi cunoscînd un unghi şi distanțele centrului cercului înscris la celelalte vîrfuri ale triunghiului.
7. Construiți triunghiul după latura a, mediana m_a si unghiul α .
8. Prin punctul M să se ducă un cerc ω_1 care să taie cercul dat ω_1 în punctele A, B, astfel ca unghiul AOB şi unghiul AO_1B să aibă valorile date α şi β.
9. Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscînd ipotenuza şi ştiind că proiecția unei catete pe ipotenuză este egala cu cealaltă catetă.
10. Să se construiască triunghiul dreptunghic BAC, cunoscînd ipotenuza BC şi suma S a proiecțiilor catetelor pe o dreaptă d înclinată cu unghiul α pe cateta AC.
11. Să se construiască un triunghi dreptunghic ABC cunoscînd razele cercurilor înscrise în triunghiurile $AA'B$, $AA'C$, în care A' este mijlocul ipotenuzei BC.
12. Sa se construiască triunghiul ABC cunoscînd bisectoarea $AL=l_a$, unghiul α pe care această bisectoare îl face cu latura BC şi suma $b+c$ a laturilor AB, AC.
13. Să se construiască triunghiul ABC cunoscînd a, R si unghiul pe care-l face OI cu una din bisectoarele interioare, unde I este piciorul bisectoarei dusă din vîrful A.
14. Sa se construiască un triunghi dreptunghic BAC, cunoscînd segmentele determinate pe ipotenuză de dreptele care împart unghiul A in trei părți egale.

§4. Transformări geometrice în construcții

Metoda transformărilor geometrice în construcție se reduce la aplicarea transformărilor din grupul mişcării, analitice şi inversia în cadrul analizei problemei. Se consideră problema elementară: construcția unei figuri la transformarea dată în cadrul grupului mişcării.

Metoda transformărilor constă în faptul că în cadrul analizei, asupra figurii căutate se aplică o transformare geometrică, ceea ce uşurează ulterior construcția. Vom analiza transformările grupului mişcării în construcții:

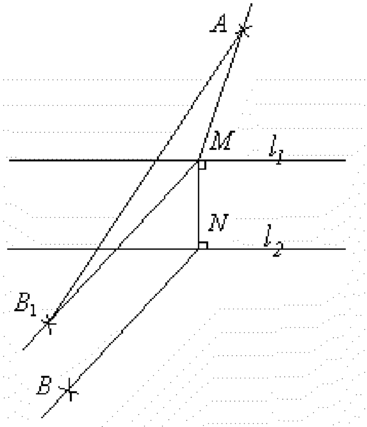
1. Translația paralelă T: se aplică în special atunci cînd figurile conțin drepte paralele sau segmente pe acestea, precum şi la construcția poligoanelor.

Notăm T_a-translația paralelă după vectorul $\vec{a}$.

Exemplu:

Pe ambele părți ale unui canal sunt situate punctele *A* şi respectiv *B*. Construiți cel mai scurt drum dintre *A* şi *B*, încît podul peste canal să fie perpendicular malurilor canalului, iar malurile se consideră drepte paralele $l_1||l_2$.
Fie [MN]- podul

Analiza



$[AM]+[MN]+[NB]=[AM]+[MN]+[MB_1]$ unde

$T_{MN}([BN])=[B_1M]$

$[AB_1]\le[B_1M]+[MA]$

$[AB_1]=[B_1M]+[MA]$ cînd $M\in[B_1A]$

Problema se reduce la construcția punctului B_1

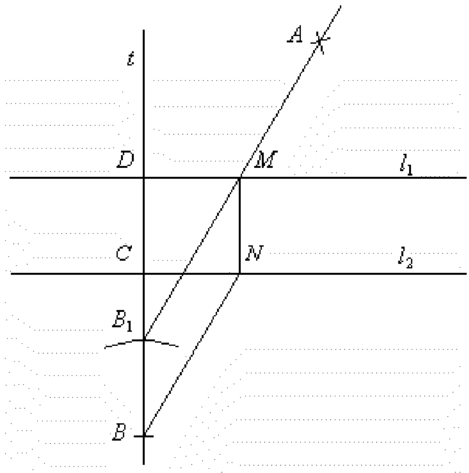
prin translația paralelă din punctul B după vectorul NM.

Construcția

1. $t\perp l_1 : B\in t$
2. $D=t\cap l_1$

   $C=t\cap l_2$
3. $B_1\in t:[BB_1]=[CD]$
4. $M\in[AB_1]\cap l_1$
5. $[MN]\perp l_2 : N\in l_2$

$AMNB$ - minim



Demonstrație

Punctele A, M, B_1 se află pe o dreaptă, adică $B_1M + MA$ este distanța minimă. Deoarece B_1MNB este paralelogram, din construcție $\Rightarrow B_1M = BN$,

$AM + MN + NB = AM + MN + MB_1 \Rightarrow AM + NB = AM + MB_1$ - minim, iar MN - constant.

Cercetare

Pentru orice caz este posibilă construcția podului, iar cînd punctul A se află pe l_1 şi punctul B se află pe l_2 atunci pot fi construite o infinitate de poduri, sau numai unul dacă $(AB) \perp l_1$.

2. Rotația R: este aplicată atunci cînd figura precăutată conține unghiuri şi laturi cunoscute, de obicei unele laturi egale. Prin notația R_O^{α} vom înțelege rotația sub unghiul α față de centrul O.

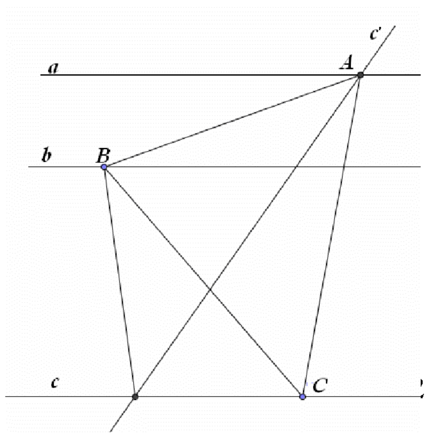
<u>Exemplu:</u>

Sunt date *3* drepte paralele *a*, *b,* şi *c*. Construiți un triunghi echilateral, încît vîrfurile să se afle pe aceste drepte unul cîte unul.

Construcția

1. $B \in b$
2. $c' = R_B^{60^0}(c)$
3. $A = a \cap c'$
4. $C = R_B^{-60^0}(A)$

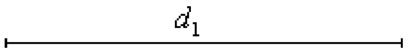
ΔABC- construit



3. Simetria în raport cu o dreaptă *s*: se aplică în cazurile cînd figura este simetrică față de o dreaptă. Notația S^l indică simetria față de dreapta l.

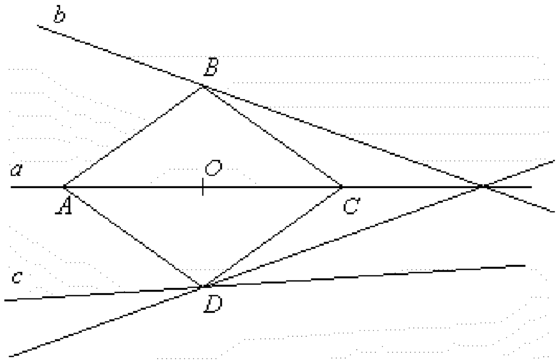
<u>Exemplu:</u>

Să se construiască un romb astfel încît una din diagonale d_1 să se afle pe dreapta a iar celelalte vîrfuri să se afle pe două drepte date b şi c.



Analiza

Fie $ABCD$- rombul precăutat. Rombul este simetric față de diagonalele sale. Adică $S_a(B)=D$



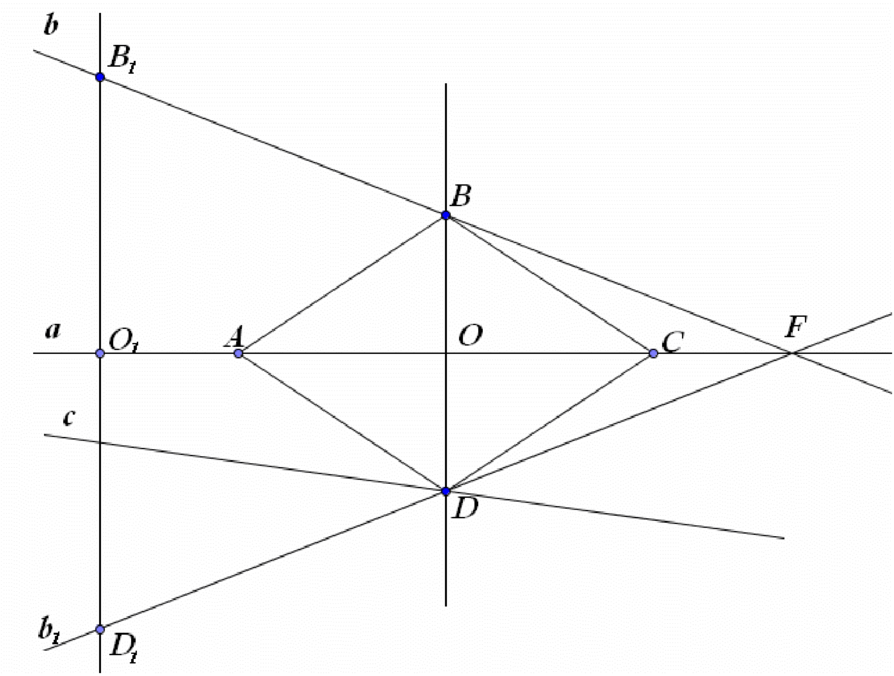
$S_a(b)=b_1$,

$D=c\cap b_1$.

Construcția

1. $F=b\cap a$
2. $S_a(B_1)=D_1 : B_1\in b$
3. $D=c\cap b_1$
4. $B=S_a(D)$
5. $O=(BD)\cap a$
6. $[AO]=[OC]=\frac{d_1}{2} : \{A,C\}\subset a$

$ABCD$ - *romb*



Cercetare

1.Dacă $b_1 \cap c = \emptyset$ atunci nu există un astfel de romb.

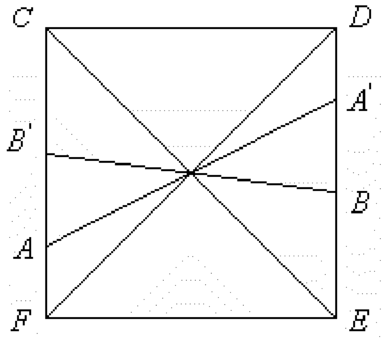
2.Dacă $b_1 \cap c = D$ atunci există un singur romb.

3.Dacă b_1 coincide cu c atunci există o infinitate de romburi.

4.Simetria în raport cu un punct S: se aplică în cazul unei simetrii centrale a figurii precăutate. Notația S_o reprezintă simetria în raport cu punctul O.

Exemplu:

Un sector de pământ de forma pătrată a fost îngrădit cu un gard. Noaptea a dispărut gardul însă pe două laturi paralele s-au păstrat cîte un stîlp. Se cunoaşte de asemenea şi punctul de intersecție a diagonalelor pătratului. Să se construiască pătratul inițial.

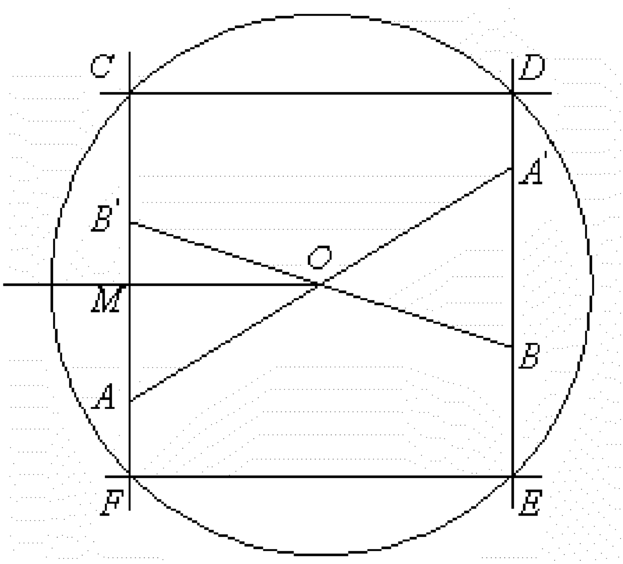


Analiza

Fie pătratul este construit.

$S_o(A) = A' : A' \in DE$

$S_o(B) = B' : B' \in CF$



Construcția

1. $S_o(A) = A'$
2. $S_o(B) = B'$
3. $(OM) \perp (AB) : M \in (AB')$
4. $[OM] = [MC] : C \in (AB')$
5. $\omega(O;OC) \cap (BA) = \{D, E\}$
6. $\omega \cap BA' = \{F\}$

CDEF - construit

Demonstrație

Din construcție:
$S_o([CF]) = [DE] \Rightarrow [CF] = [DE], \; [OC] = [OF] = [OD] = [OE].$
Deoarece diagonalele $[CE] = [DE]$ şi
$\angle CFE = \angle FED = \angle EDC = \angle DCF = 90^o$ (se sprijină pe diametru)$\Rightarrow CFED$ este pătrat.

Cercetare

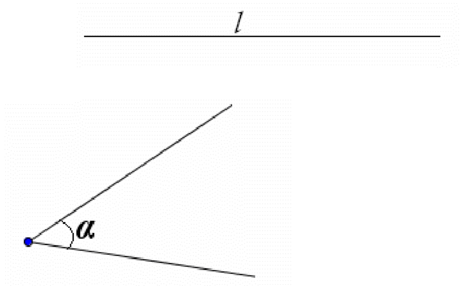
1. Dacă $AOB \notin l \Rightarrow \exists$ pătrat .
2. $A, O, B \in l$ şi $[AO] \neq [OB]$ – nu există pătrat.
3. $S_0(A) = B \Rightarrow$ vom avea o infinitate de pătrate.

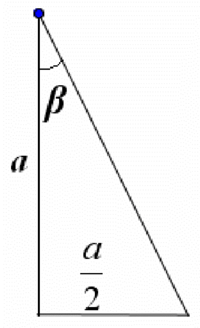
De asemenea vom analiza aplicarea transformărilor analitice: *omotetia* şi *asemănarea.*

5. Omotetia H: se aplică la construcția figurilor cu unghiuri cunoscute, precum şi la înscrierea unei figuri în alta.

Exemplu:

Construiți un triunghi isoscel după unghiul de la vîrf α şi suma bazei cu înălțimea dusă la ea l.

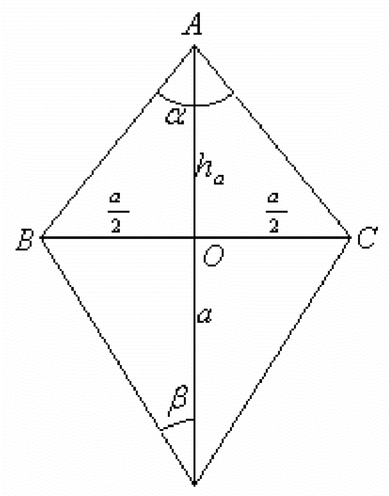




Analiza

Fie ΔABC - construit şi O-mijlocul bazei $[BC]$. Fixăm pe semidreapta $[AO)$ punctul E, încît $[AE]=l=h_a+a$.

$\angle OAE = \beta = arctg\frac{1}{2}$. Astfel ΔAEB poate fi construit, iar apoi şi ΔABC.



Construcția

1. $\beta = arctg\frac{1}{2};\left(tg\beta = \frac{1}{2}\right)$

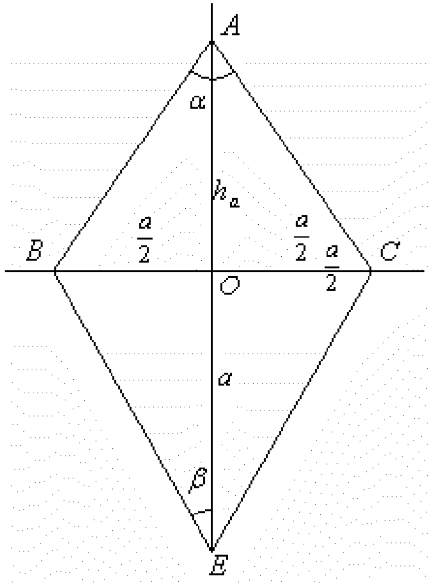
2. $\Delta EBA : \angle BAE = \frac{\alpha}{2};$

$\angle BEA = \beta;\ [AE] = l$

3. $(BO) \perp (AE) : O \in [AE]$

4. $C \in [BO) : [BO] = [OC]$

ΔBAC - construit



Demonstrație

Conform construcției $\angle BAC = \alpha$ iar $[OE] = 2[BO] = BC$, $AO = h_a$, $[OE]+[AO] = l = [BC]+[AO]$.

Cercetare

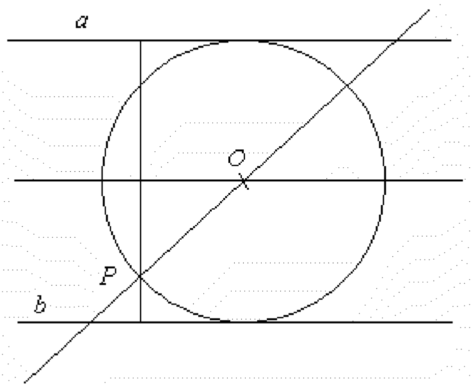
Problema are soluții pentru orice unghi mai mic decît 180^0.

<u>Exemplu:</u>

Sunt date două drepte paralele *a* şi *b* şi punctul *P* ce se află între ele. Construiți un cerc tangent la ambele drepte ce trece prin punctul *P*.

Analiza

Pentru ca cercul să fie tangente dreptele *a* şi *b*, este necesar ca centrul cercului să fie egal depărtat de

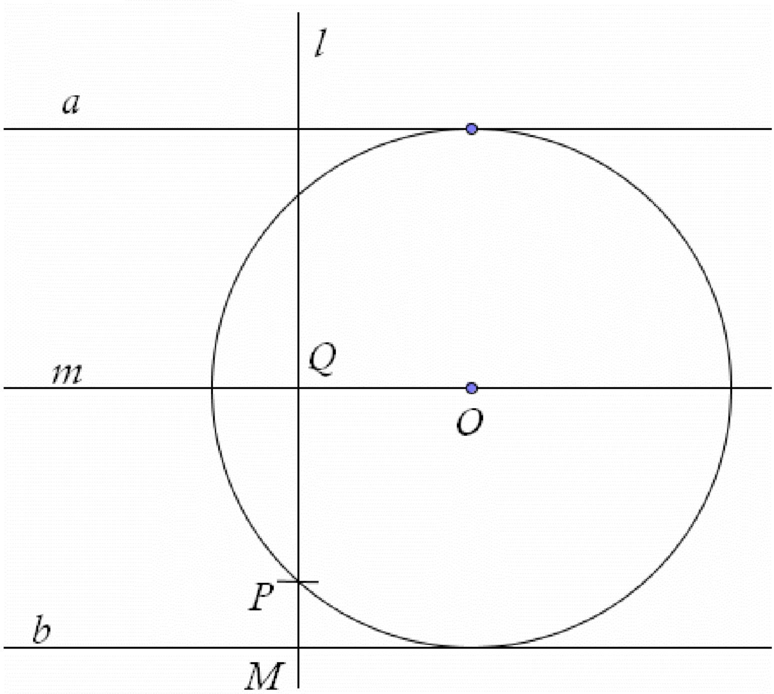


dreptele *a* şi *b*, precum şi de punctul P.

Construcția

1. $l \perp a : P \in l$
2. $N = l \cap a$, $M = l \cap b$
3. $Q \in l : [MQ] = [QN]$
4. $m \perp l : Q \in m$
5. $\omega_1(P, [QN])$
6. $\omega_1 \cap m = O$

$\omega(O;[OP])$



Demonstrație
Din construcție avem că $[OP]=[QN]$, deoarece $[QM]=[QN]=R$, R - raza cercului $\omega(O,[QN])$. a - tangenta la ω ; b - tangentă la ω .

Cercetare
Pentru orice punct P cuprins între a şi b construcția va fi posibilă.

Metoda locurilor geometrice

Una din metodele de rezolvare a problemelor de construcție este metoda locurilor geometrice. Se numeşte *loc geometric al punctelor* figura care constă din toate punctele planului ce posedă o anumită proprietate.
De exemplu, circumferința poate fi definită ca locul geometric al punctelor egal depărtate de la un punct dat. O proprietate des întîlnită a locului geometric este: *locul geometric al punctelor egal depărtate de la două puncte date este mediatoarea segmentului cu extremitățile în aceste puncte date.*

Esența metodei locurilor geometrice, folosită la rezolvarea problemelor de construcție, este următoarea. Admitem că rezolvînd o problemă de construcție, trebuie să găsim un punct X care satisfac doua condiții. Locul geometric al punctelor care satisfac prima condiție este o figură oarecare F_1, iar locul geometric al punctelor care satisfac a doua condiție este o figură oarecare F_2. Punctul căutat X aparține figurilor F_1 şi F_2, adică este un punct de intersecție a acestor figuri. Dacă aceste locuri geometrice sunt simple (să zicem, constau din drepte şi circumferinţe), noi le putem construi şi găsi punctul X care ne interesează.

Exemplu:

Sunt date 3 puncte A, B, C. Să se construiască punctul X egal depărtat de punctele A şi B şi situat la distanţa dată de la punctul C.

Analiza

Punctul căutat X satisface două condiţii:
1. El este egal depărtat de la punctele A şi B;
2. El este situat la distanţa dată de la punctul C.

Locul geometric al punctelor care satisfac prima condiţie este mediatoarea segmentului $[AB]$. Locul geometric al punctelor care satisfac a doua condiţie este o circumferinţă de raza dată cu centrul în punctul C. Punctul căutat X este situat la intersecţia acestor locuri geometrice.

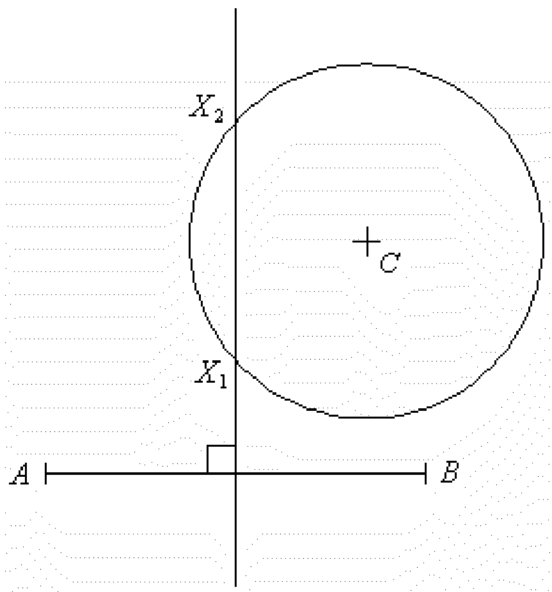
Construcţia

m-mediatoare $[AB]$

$\omega(c,r)$

$\{X_1, X_2\} = \omega \cap m$

X_1, X_2 – construite



Demonstraţie

rezultă din analiză şi construcţie.

Cercetarea

Dacă m intersectează

ω în două puncte, atunci
Obținem 2 puncte. Dacă m este tangentă la ω, obținem un singur punct, adică punctul de tangență. În restul cazurilor nu obținem astfel de puncte.

Probleme propuse:

1. Construiți triunghiul isoscel cunoscînd două mediane diferite.
2. Construiți trapezul după suma bazelor S şi diagonalele d_1, d_2.
3. Construiți cercurile înscrise si circumscrise triunghiului dat ΔABC.
4. Prin două puncte date A şi B construiți un cerc, ce împarte cercul dat $\boldsymbol{\omega}$ în jumate.
5. Construiți un romb după latura a şi raza cercului înscris.

§5. Metoda algebrică

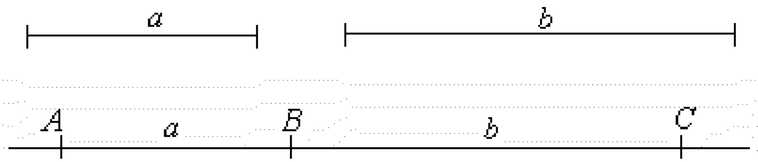
Metoda algebrică în construcție se reduce la construcția segmentului dat printr-o formulă în care sunt utilizate numai operații algebrice (+, –, :, ×, $\sqrt{\ }$,). Fie dată formula $x = f(a,b,...,u)$, unde $a,b,...,u$ sunt un număr finit de segmente date.

Formula $x = f(a,b,...,u)$ pentru a fi construit segmentul x va fi transformată în formule elementare care vor fi date în continuare (dacă este posibil).

Formule elementare:

1. $x = a + b$

Construcția

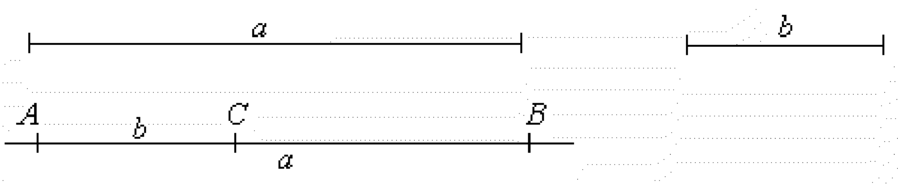


$x = [AC]$

2. $x = a - b$, $(a > b)$

$[AB] = a, [AC] = b$

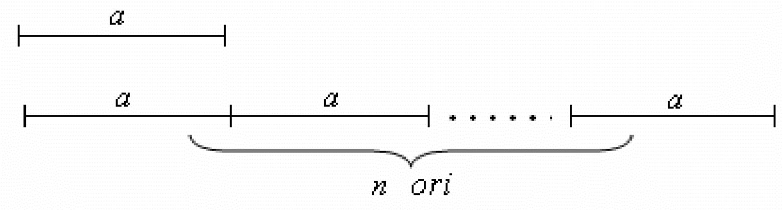
Construcția



$x = [CB]$

3. $x = na$, $n \in N$

Construcția



4. $x = \dfrac{a}{n}, \quad n \in N$

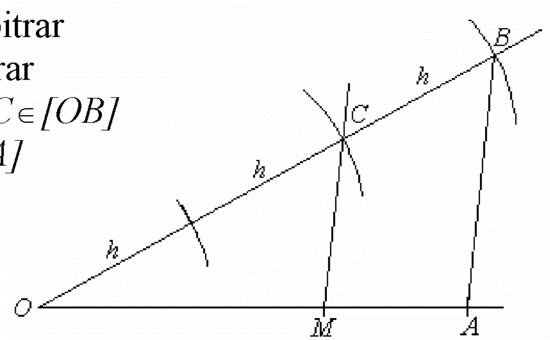
(divizarea segmentului în *n* părți egale)
Această divizare se bazează pe teorema lui Thales.

Construcția

(*n*=3)

1. $\angle BOA$ -un unghi arbitrar
2. h -un segment arbitrar
3. $[OB]=3h,\ [CB]=h : C \in [OB]$
4. $(CM) \parallel (BA) : M \in [OA]$

$x=[AM]$

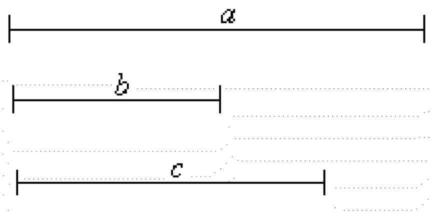


5. $x = \dfrac{n}{m} a, \quad \{n, m\} \in N$

Problema se reduce la formulele 3 şi 4.

6. $x = \dfrac{ab}{c}, \quad \left(\dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{c} \right)$

(Segmentul al patrulea proporțional)

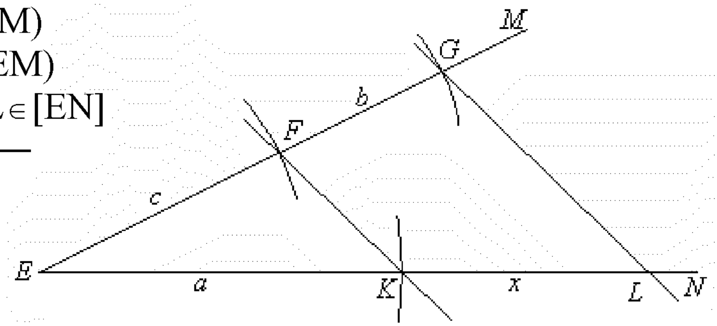


Construcția

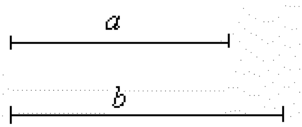
1. $\angle MEN$ -arbitrar
2. [EK]=a:K $\in$ [EN)
3. [EF]=c:F $\in$ [EM)
4. [FG]=b:G $\in$ [EM)
5. (GL) $\|$ (FK):L $\in$ [EN]

---

x=[KL]



7. $x = \sqrt{ab}$



Aplicînd teorema înălțimii unui triunghi dreptunghic, se poate construi un segment de lungime $x = \sqrt{ab}$. Se construieşte:

a) un semicerc cu diametrul de lungime $a + b$;

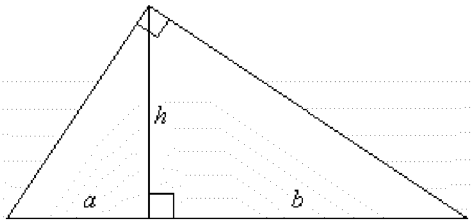
b) depunem pe acest diametru segmentul de lungime a (astfel primim punctul H);

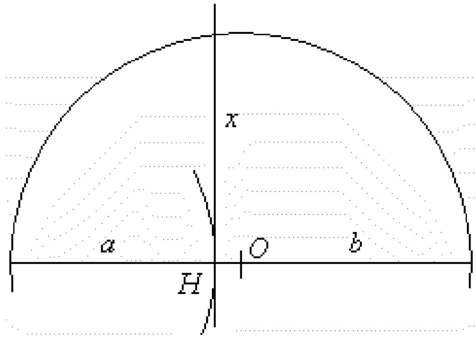
c) perpendiculara din punctul H pe diametrul semicercului, pîna la intersecția ei cu semicercul.

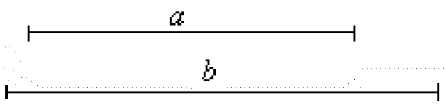
Conform teoremei înălțimii (*Înălțimea unui triunghi dreptunghic este media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuza triunghiului*), $x = \sqrt{ab}$.

$h^2 = ab$

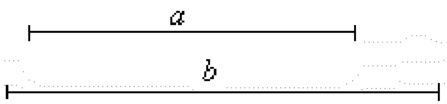
$h = \sqrt{ab}$





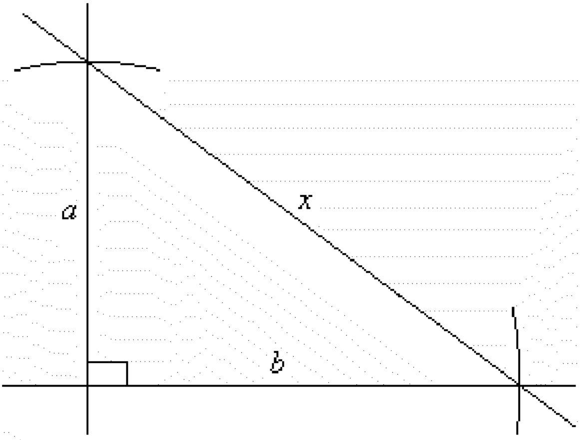


8. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$



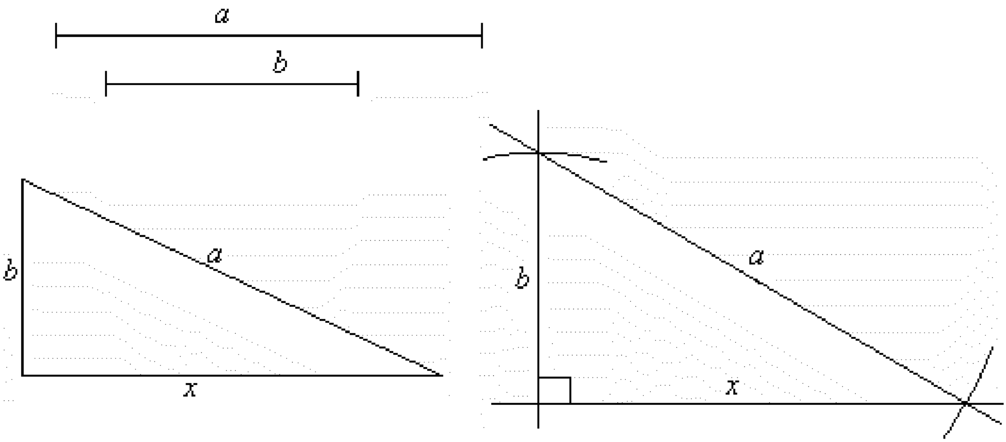
Pentru a construi un segment de lungime $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ este suficient să construim un triunghi dreptunghic cu catetele de lungime a şi respectiv b . Conform teoremei lui Pitagora

(Directă: *Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor triunghiului.*) ipotenuza triunghiului are lungimea $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.



9. $x=\sqrt{a^2-b^2}$, $(a>b)$

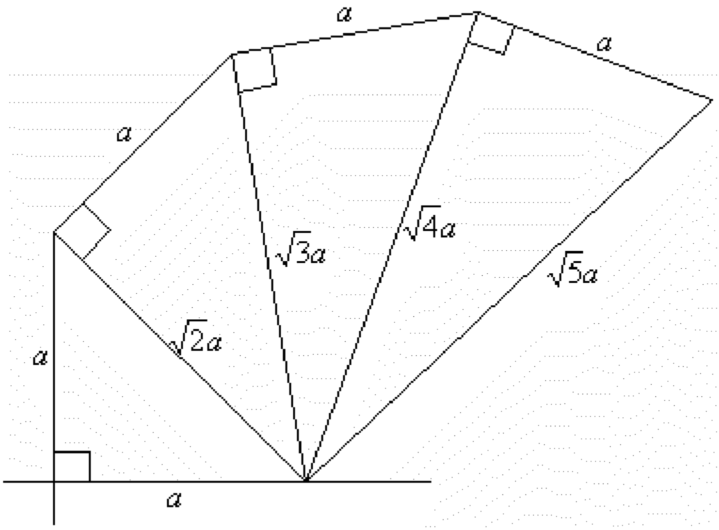
Problema se reduce la formula 8.



Consecințe din formulele elementare :

Din formula 6 poate fi construită $x=\dfrac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_{n-1}}$

Din formula 7 poate fi construită $x=\sqrt{na}$, $n\in N$

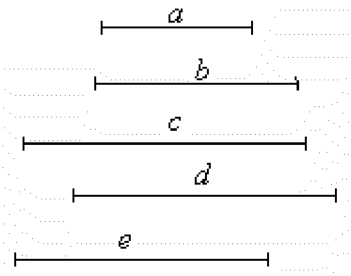


Exemplul I:

$$x=\frac{abc}{de};$$

Analiza

$$y=\frac{ab}{d}\Rightarrow x=\frac{yc}{e}$$

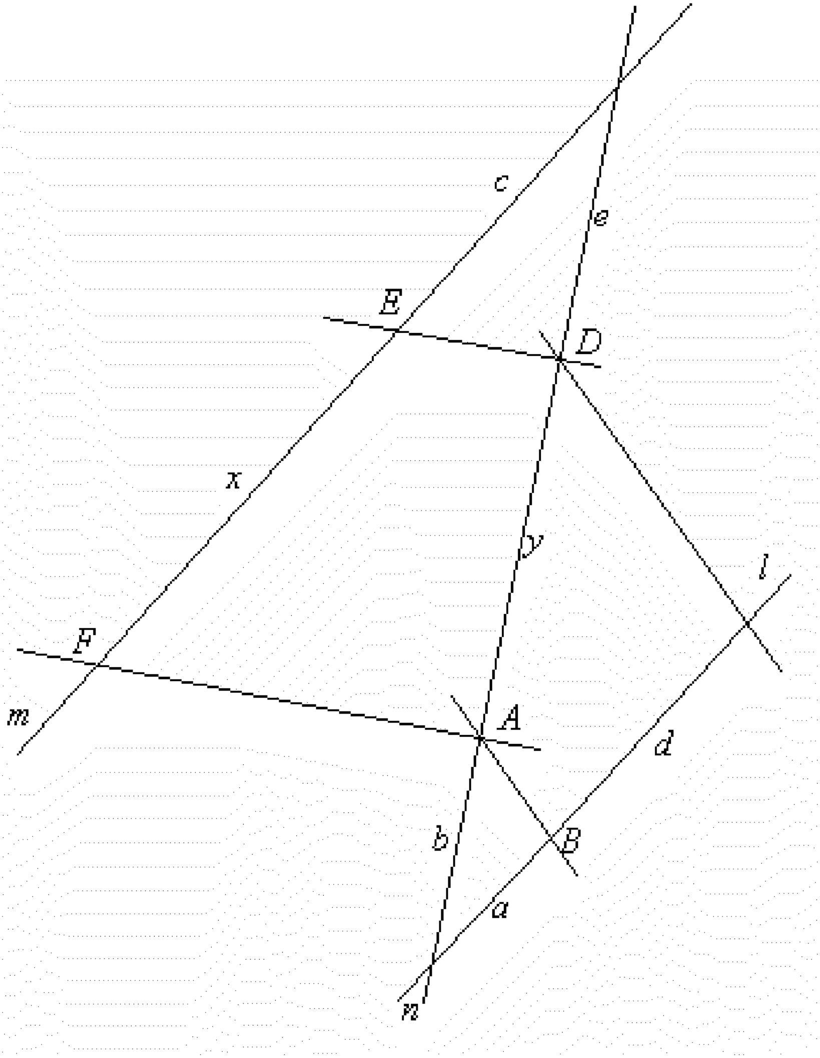


Construcția

1. $y=\dfrac{ab}{d}$

2. $x=\dfrac{yc}{e}$

x-segmentul construit

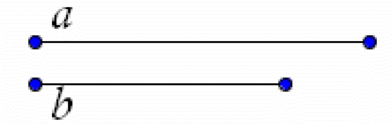

c
e
E
D
x
y
l
F
m
A
d
b
B
a
n

Exemplul II:

$x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}\ , \quad a > b$

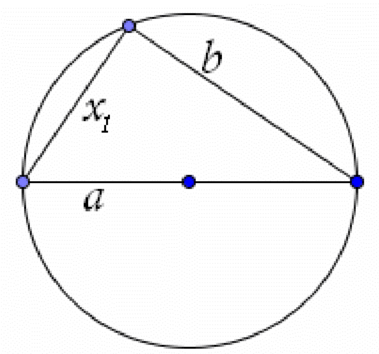
Analiza

$x = \sqrt{\sqrt{a^4 - b^4}} = \sqrt{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$

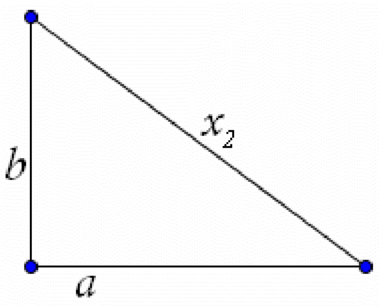


Construcția

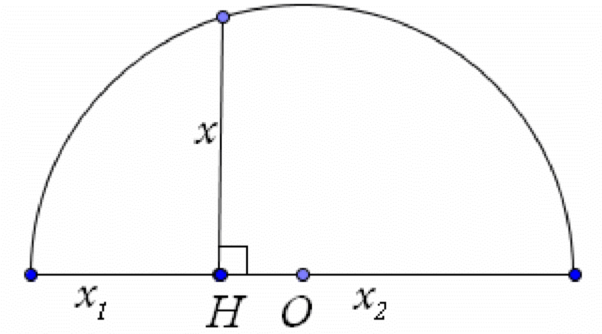
1. $x_1 = \sqrt{a^2 - b^2}$



2. $x_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$



3. $x = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$

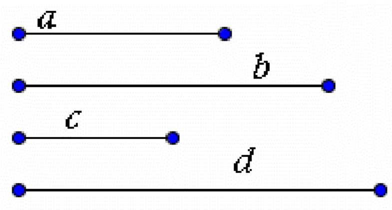


Exemplul III:

$x = \sqrt{ab + cd}$

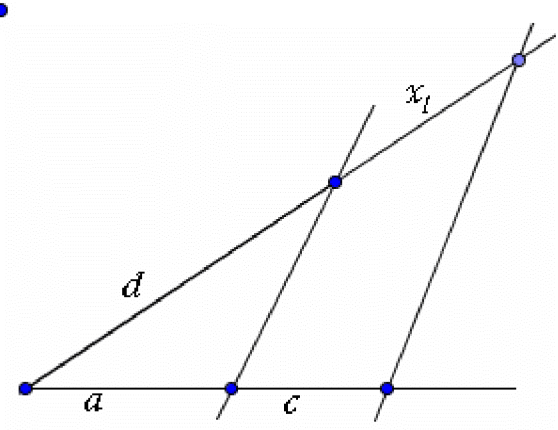
Analiza

$$x = \sqrt{a\left(b + \frac{cd}{a}\right)}$$

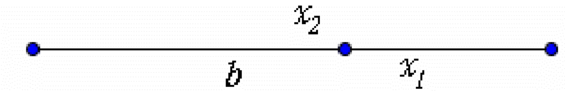


Construcția

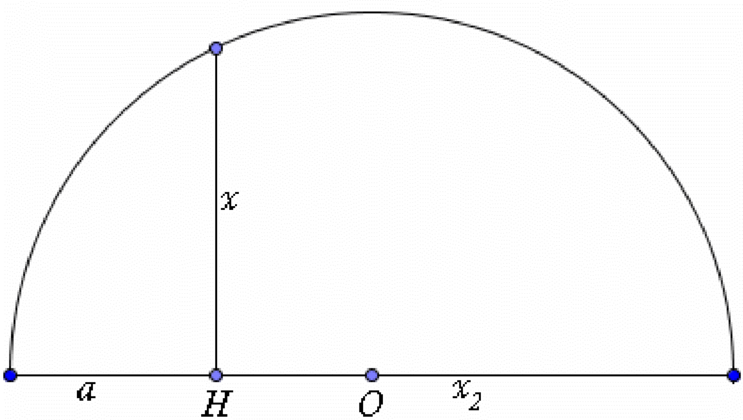
1. $x_1 = \dfrac{cd}{a} \Rightarrow \dfrac{x_1}{c} = \dfrac{d}{a}$;



2. $x_1 = b + x_1$;



3. $x=\sqrt{ax_2}$



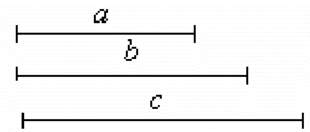
x-segmentul construit

Exemplul IV:

$$x=\frac{a^3+b^3}{ab+bc}$$

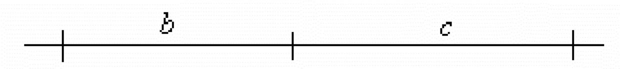
Analiza

$$x=\frac{a^3+b^3}{ab+ac}=\frac{a^3}{ab+ac}+\frac{b^3}{ab+ac}=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+\frac{ac}{b}}$$

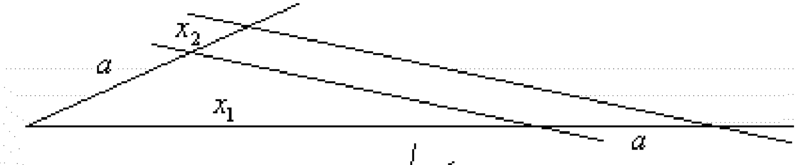


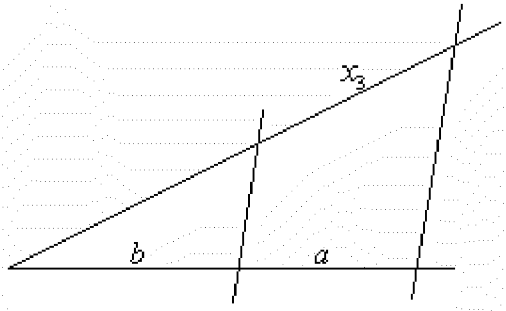
Construcția

1. $x_1=b+c$

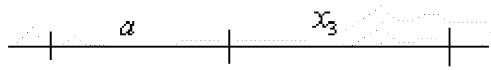


2. $x_2 = \dfrac{a^2}{x_1} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a} = \dfrac{a}{x_1}$

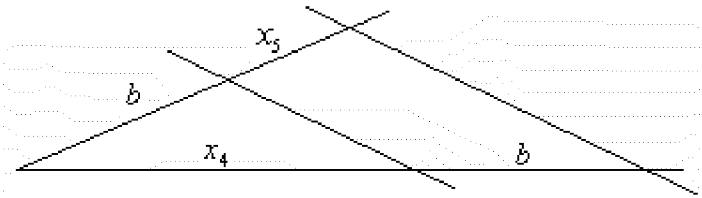




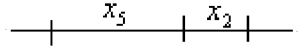
4. $x_4 = a + x_3$



5. $x_5 = \dfrac{b^2}{x_4} \Rightarrow \dfrac{x^5}{b} = \dfrac{b}{x_4}$



6. $x = x_2 + x_5$



---

x-segmentul construit

§6. Metoda algebrică în problemele de construcție

Metoda algebrică se aplică în problemele de construcție dacă printr-un raționament al analizei enunțului problemei poate fi aflată o astfel de formulă sau mai multe ce ne sugerează construcția figurii necesare.

<u>Exemplul I:</u>

Se dă ΔABC. Să se construiască 3 cercuri cu centrul în vîrfurile triunghiului, astfel încît să fie tangente între ele din exterior.

Analiza

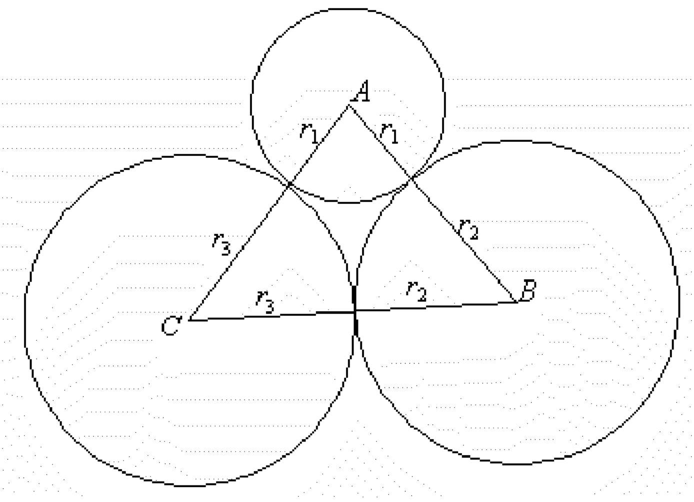
$r_1 + r_2 = c$

$r_2 + r_3 = a$

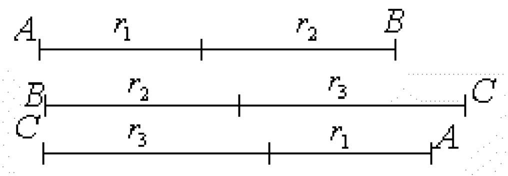
$r_3 + r_1 = b$

$r_1 + r_2 + 3_3 = \frac{a+b+c}{2}$,

$r_1 = \frac{b+c-a}{2}$



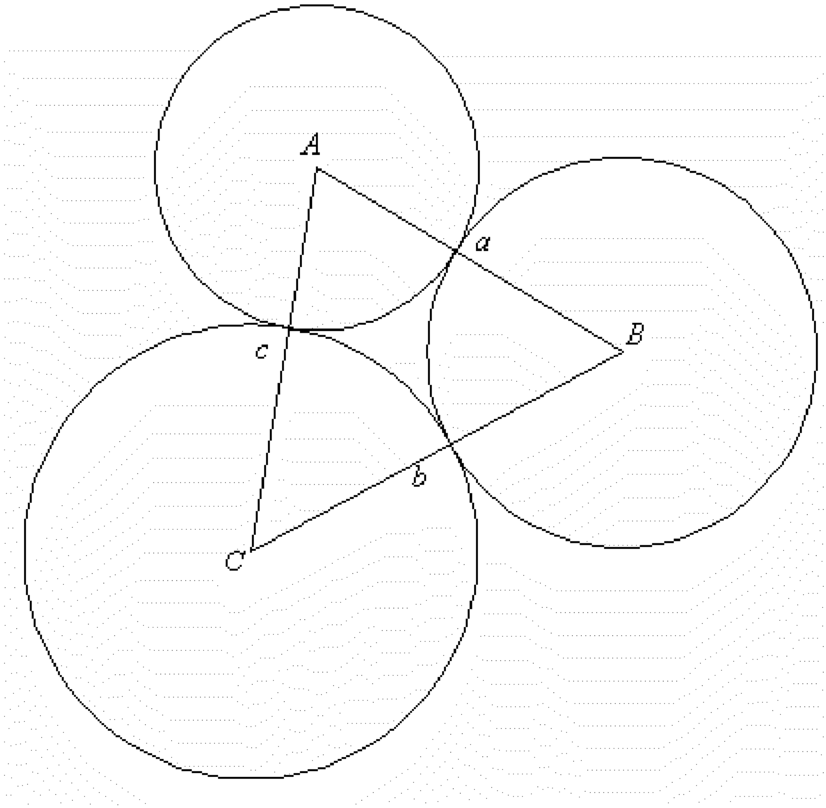
Este suficient să aflăm o singură rază, de exemplu r_1, deoarece restul razelor se obțin ca diferența din laturile respective şi raza aflată.



Construcția

1. $r_1 = \dfrac{b+c-a}{2}$
2. $\omega_1(A; r_1)$
3. $\omega_2(B; c-r_1)$
4. $\omega_3(C; b-r_1)$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – construite



Exemplul II:

Construiți un triunghi dreptunghic ştiind ipotenuza c şi l-lungimea bisectoarei unghiului drept.

Analiza

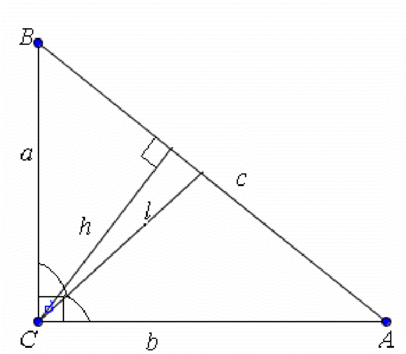
Fie a,b-catetele ΔABC.

$$a^2+b^2=c^2$$

Din aria triunghiului dreptunghic avem:

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}bl+\frac{\sqrt{2}}{2}al\right)$$

$$ab=ch=\frac{\sqrt{2}}{2}bl+\frac{\sqrt{2}}{2}al$$



$$\sqrt{2}ch=l(a+b)$$

$$2c^2h^2=l^2\left(c^2+2ch\right)$$

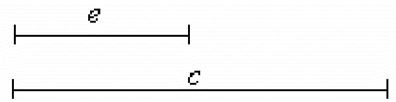
$$2c^2h^2-2chl^2-c^2l^2=0$$

$$2ch^2-2hl^2-cl^2=0$$

$$h=\frac{l(l\pm\sqrt{e^2+2c^2})}{2c}$$

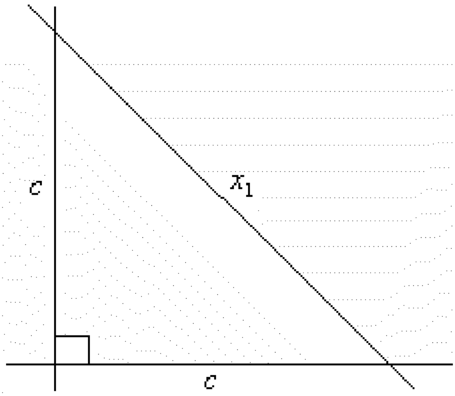
Deoarece $h>0\Rightarrow$

$$h=\frac{l\left(l+\sqrt{l^2+2c^2}\right)}{2c}$$

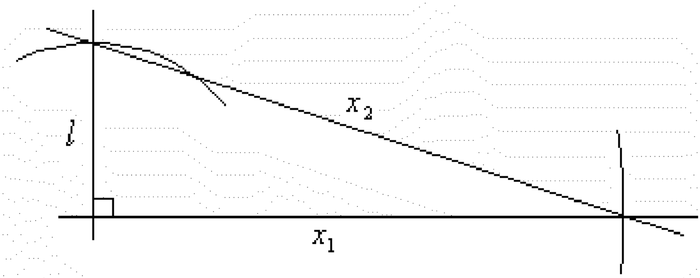


Construcția

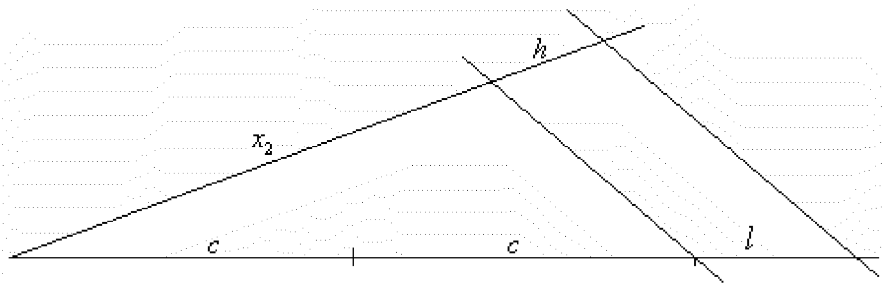
1. $x_1=\sqrt{2}c$



2. $x_2 = \sqrt{l^2 + (x_1)^2}$;



3. $x_3 = l + x_2$



4. $x = \dfrac{lx_3}{2c} \Rightarrow \dfrac{x_3}{l} = \dfrac{x_2}{c}$;

5. $[AB] = c$;

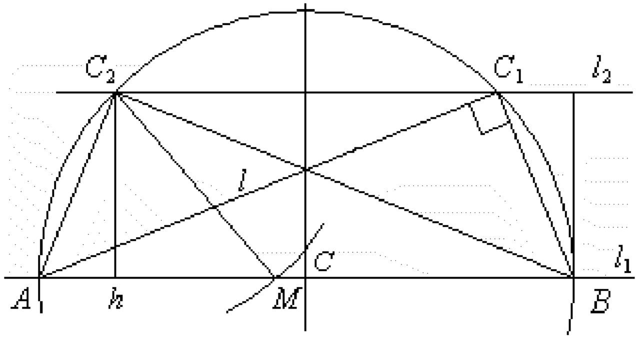
6. $M \in [AB] : [AM] = [MB]$

$7.\ \omega(M, \frac{c}{2})$

$8.\ l_2 \parallel (AB): \rho(l_2,(AB)) = h$

$9.\ \omega \cap l_2 = \{c_1, c_2\}$

ΔABC- construit



Demonstrație

1.Conform teoremei lui Pitagora, într-un triunghi dreptunghic isoscel ipotenuza este $\sqrt{2}c$ (ştiind catetele).

2.Conform teoremei lui Pitagora într-un triunghi dreptunghic $x_2 = \sqrt{l^2 + (x_1)^2}$.

3. $\frac{x}{l} = \frac{x_2}{2c}$, deoarece între drepte paralele se află segmente proporționale.

4.Conform construcției h-înălțimea triunghiului dusă pe ipotenuză.

Cercetare

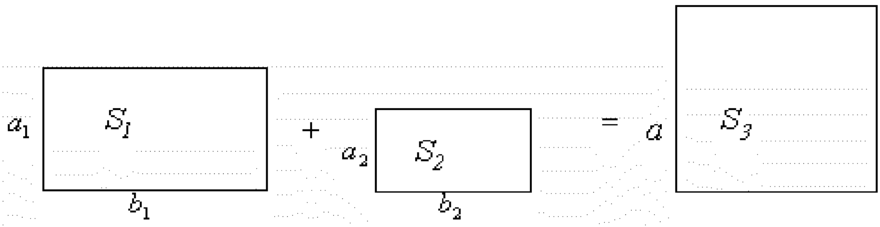
Dacă $l \le \frac{c}{2} \Rightarrow$ există un singur triunghi.

În restul cazurilor nu există triunghi.

Exemplul III:

Construiți un pătrat aria căruia să fie egală cu ariile a două dreptunghiuri date.

Analiza



$$S_1 = a_1 b_1 \qquad S_2 = a_2 b_2 \qquad S_3 = a^2$$

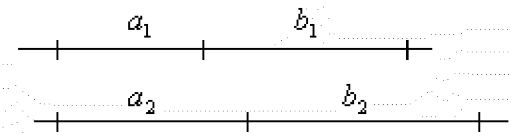
$$a^2 = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$a = \sqrt{a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

$$a = \sqrt{a_1\left(b_1 + \frac{a_2 b_2}{a_1}\right)}$$

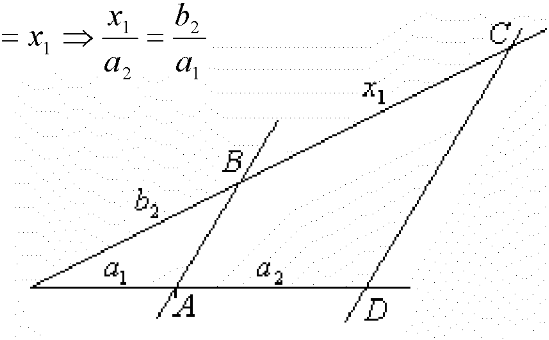
$$x_2 = b_1 + x_1$$

$$a = \sqrt{a_1 \cdot x_2}$$

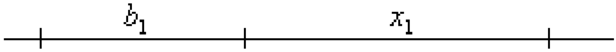


Construcția

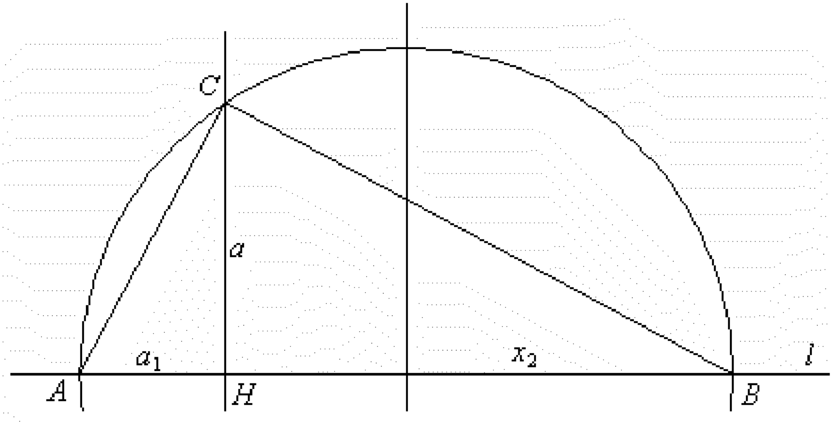
1. $\dfrac{a_2 b_2}{a_1} = x_1 \Rightarrow \dfrac{x_1}{a_2} = \dfrac{b_2}{a_1}$



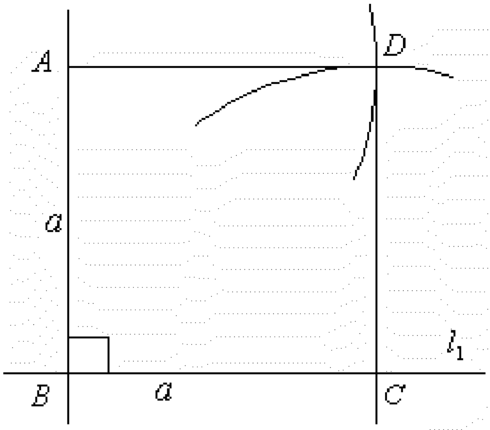
2. $x_2 = b_1 + x_1$



3. $a = \sqrt{a_1 \cdot x_2}$



4. $(AB) \perp (BC) : [AB] = [BC] = a$



5. $D = \omega_1(A,a) \cap \omega_2(C,a)$

$ABCD$ - pătrat

Demonstrație

1. $\frac{x_1}{a_2} = \frac{b_2}{a_1}$ - deoarece dreptele paralele determină segmente proporționale.

2.Conform construcției $AB = a_1 + x_2$. $[AB]$- ipotenuza triunghiului dreptunghic; $[CH] \perp [AB] \Rightarrow [CH]$- înălțimea dusă din unghiul drept $\Rightarrow CH = \sqrt{a_1 \cdot x_1}$ (conform teoremei înălțimii).

Cercetare

Pentru orice x, a_1, b_1, a_2, b_2 - pătratul se construiește.

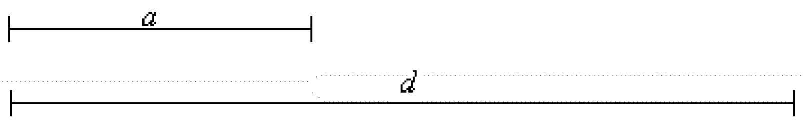
Probleme propuse:

1. Să se construiască segmentul: $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4} + 3a$;
2. Construiți segmentul: $x = \sqrt{ab + cd} + a^2c^2 - b^2d^2$;
3. Comparați segmentele: $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ și $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$;
4. Construiți segmentul: $X = \frac{abc}{de} + ab - cd + e^2$;
5. Să se construiască segmentul: $x^2 = \sqrt{a^4 - b^4} - 2ab + a^2b^2$;
6. În cercul dat înscrieți un dreptunghi, echivalent cu un pătrat dat.
7. În cercul dat înscrieți un decagon drept.
8. Construiți un pătrat, aria căruia să fie de două ori mai mare decît aria pătratului dat.

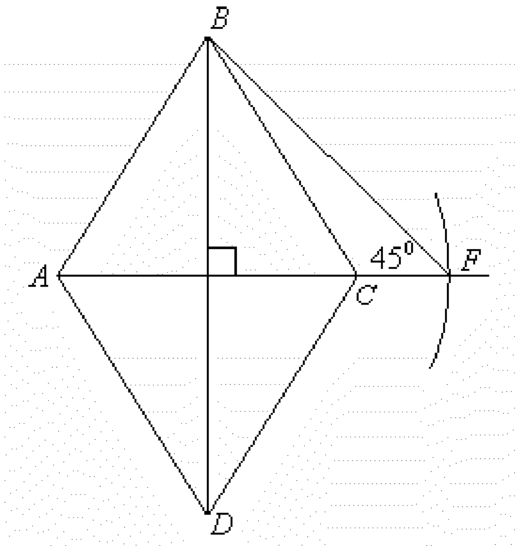
§7. Solvabilitatea problemelor de construcție cu rigla şi compasul

Problema de construcție se numeşte solvabilă dacă pentru orice set de date necesare figura căutată poate fi construită (în cazul cînd această figură există). Semnificația ultimei remarce o dovedeşte următorul exemplu.
Problemă: *Δ: a, b, c* este fără îndoială solvabilă, ceea ce nu exclude existența seturilor de date pentru care problema n-are soluții.
Notă: Uneori problema care nu este solvabilă cu un set de instrumente poate fi rezolvată cu un alt set. De exemplu, segmentul poate fi divizat în două părți egale cu rigla şi compasul, iar numai cu rigla-nu.

Exemplul I:
Să se construiască un romb după o latură şi suma diagonalelor.



Analiza



Construcția

1.$\Delta ABF : \angle BFA = 45^0$

$[AF] = \dfrac{d}{2}; [AB] = a$

2.$\omega_1(B,a)$

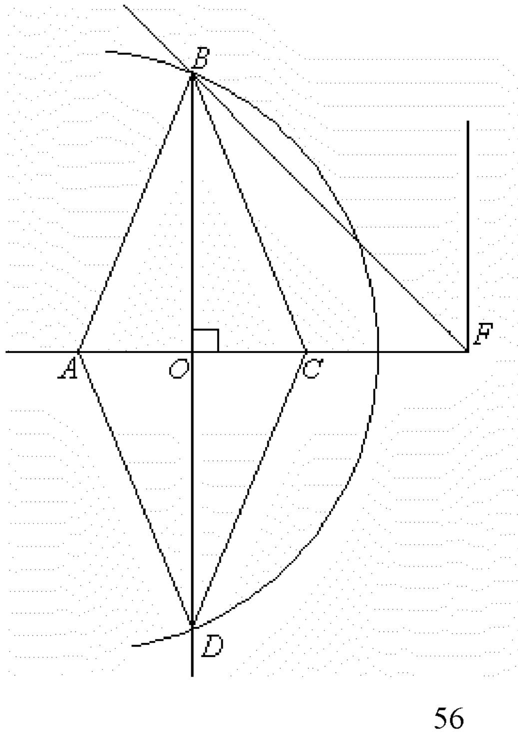
3. $C = \omega_1 \cap [AF]$

4. $\omega_2(C,a)$

5. $\omega_3(A,a)$

6. $D = \omega_2 \cap \omega_3$

$ABCD$ - construit



Demonstrație

Din construcție:

$[AB] = [BC] = [CD] = [DA] = a$.

Din analiză ΔBOF- dreptunghic isoscel

$[BO]=[OF]$.

$[BO]+[AO]=[AO]+[OF]=\dfrac{d}{2}$.

Cercetare

$\dfrac{d}{2}>a$ şi $a\geq\dfrac{\sqrt{2}}{4}d$ sau $\dfrac{\sqrt{2}}{4}d\leq a<\dfrac{d}{2}$- există un singur romb.

Exemplul II:.

Să se construiască un triunghi echilateral într-un pătrat dat.

Analiza

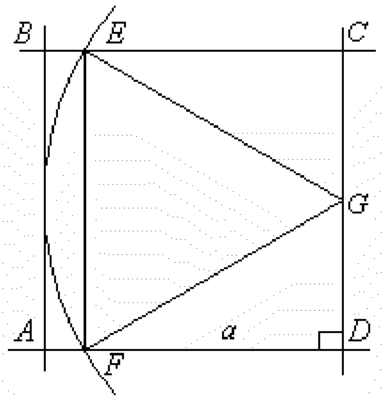
Un triunghi echilateral poate fi înscris într-un pătrat considerînd o latură paralelă unei laturi a pătratului.

Construcția

$ABCD$- construit

1. G - mijl. $[CD]$
2. $\omega(G,CD)$
3. $E=\omega\cap[BC]$
4. $F=\omega\cap[AD]$

ΔFGE- construit



Demonstrație

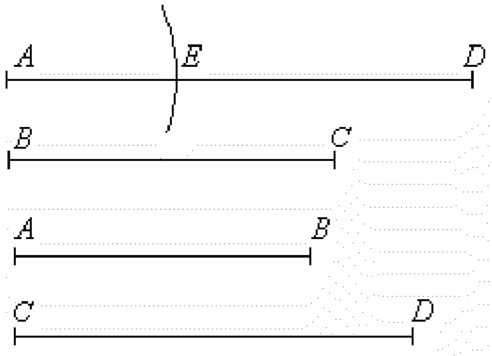
Din construcție ΔFGE- echilateral. $[GE]=[EF]=[FG]=[CD]$

Cercetare

Problema poate fi soluționată pentru orice pătrat.

Exemplul III:

Construiți trapezul după cele 4 laturi.



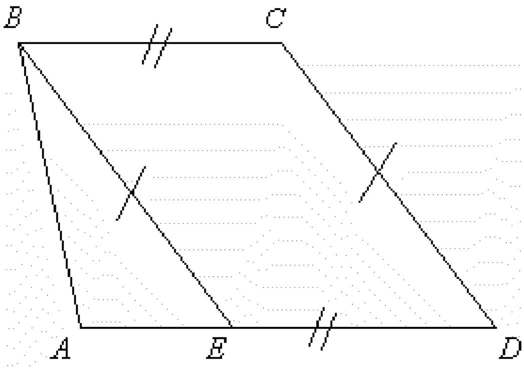
Analiza

Construcția se reduce la construirea ΔABE după 3 laturi.

Construcția

1. $\Delta ABE:[BE]=[CD],[AE]=[AD]-[BC]$
2. $D\in[AE):[ED]=[BC]$
3. $(BC)\parallel[AD]:[BC]=[ED]$

$ABCD$ - trapez



Cercetare

Dacă $[AB]+[CD]>[AD]-[BC]$ există un astfel de trapez, în restul cazurilor nu-i solubilă problema.

Probleme propuse:

1. Construiți un romb dacă avem latura a şi r raza cercului înscris.
2. Construiți triunghiul după unghiul α şi înălțimile h_b şi h_c duse la laturile triunghiului.

§8. Probleme de construcții numai cu rigla unilaterală

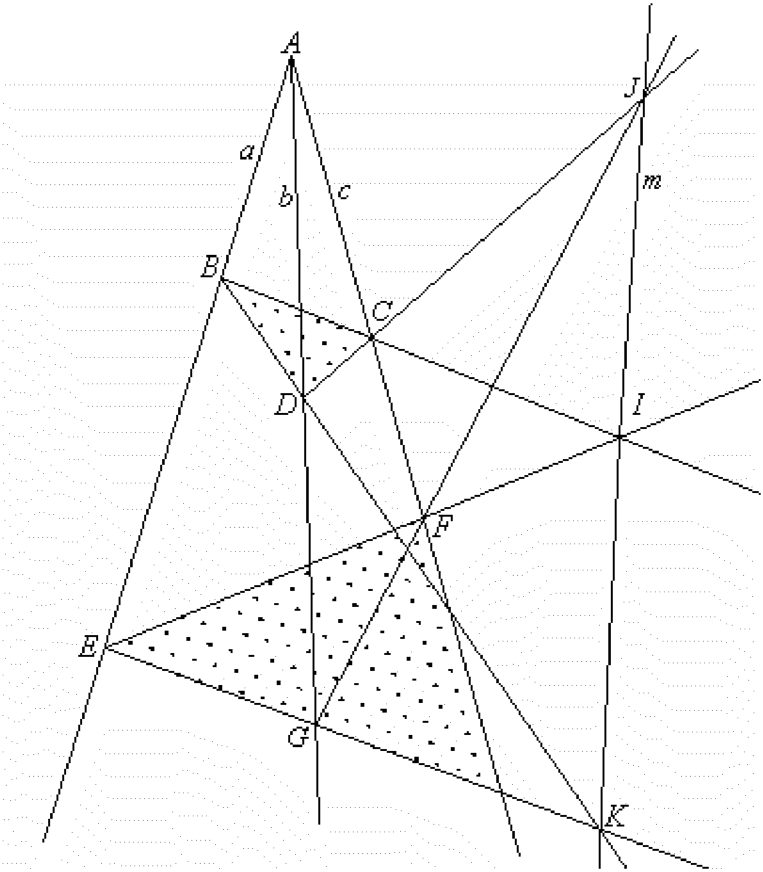
Construcțiile geometrice sunt admise cu diferite instrumente în dependență de specificul domeniului de aplicații. În particular geodezii construiesc preponderent cu rigla unilaterală.

Construcțiile numai cu rigla unilaterală a fost obiectul de studiu al matematicienilor secolului XVII-XVIII, Mor, Labert, Brianşon, Ponsele, ş.a. În geometria proiectivă, de asemenea se operează cu rigla unilaterală, astfel se păstrează proprietățile acestei geometrii.

Una din teoremele de bază ce ne fac o introducere în geometria proiectivă este teorema *Desargues*, care reprezintă o punte de trecere de la geometria euclidiană la cea proiectivă.

Teorema Desargues:

Dacă dreptele ce unesc vîrfurile respective ale ΔABC şi ΔEFG se intersectează într-un punct A atunci punctele de intersecție a laturilor respective {H,I,J} se află pe o dreaptă m.



Teoremă *(principiul dualității în plan)*
Fie A o afirmație justă despre apartenența reciprocă a punctelor şi dreptelor în planul proiectiv , atunci A' este o afirmație justă.

Astfel primim *afirmația duală a teoremei lui Desargues*:
Fie *ΔABC* şi *ΔEFG* situate într-un plan. Dacă laturile respective ale *ΔABC* şi *ΔEFG* se intersectează în 3 puncte *{H, I, J}* ce se află pe o dreaptă m, atunci dreptele ce unesc vîrfurile respective se intersectează într-un punct *A*.

Definiție: *Numim punct inaccesibil, punctul ce nu poate fi accesat în construcții.*
Punctul inaccesibil se consideră cunoscut, dacă sunt date două drepte intersecția cărora este punctul dat.

Exemplul I:

Fie dat punctul A inaccesibil cunoscut (determinat de dreptele a şi b). De construit cu rigla unilaterală un segment din dreapta ce uneşte punctul *{D}* cu *{A}*, încît punctul $D \notin a,b$.

Construcția

1.c: $D \in c : c \cap b = \{C\}$

2. $d : C \in d, B = d \cap a$

3. $(BD) \cap b = E$

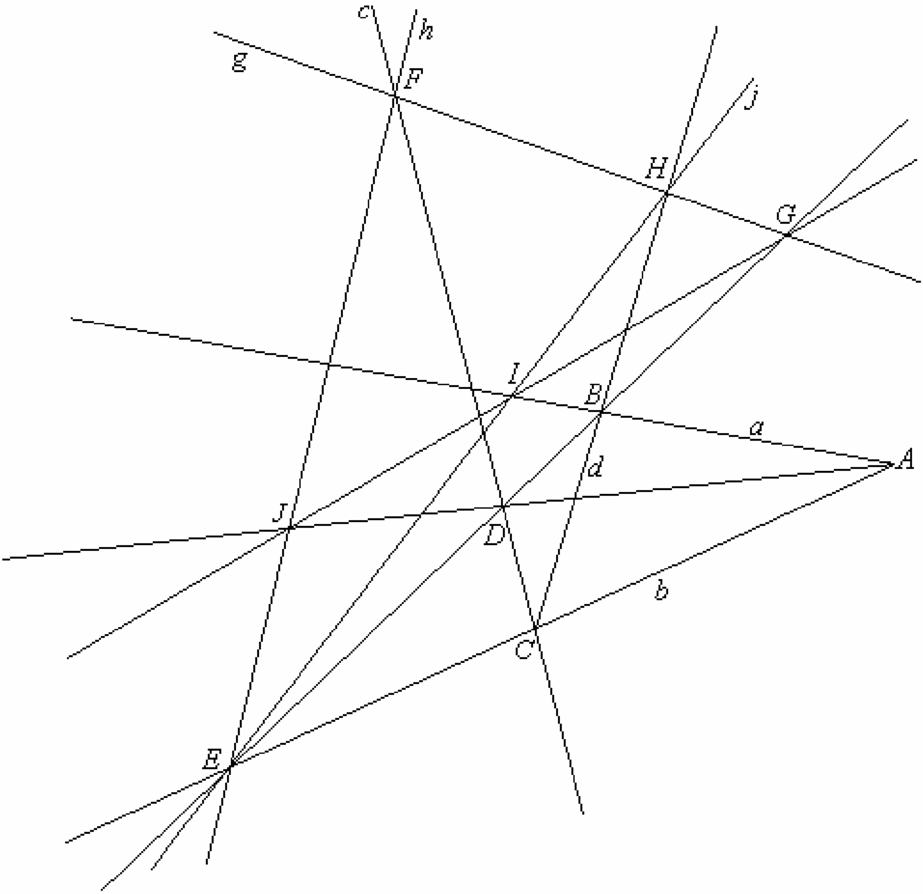
4. $F \in (CD), G \in (EB)$

5. $(CB) \cap (FG) = H$

6. $(HE) \cap a = I$

7. $(FE) \cap (GI) = J$

$[JD]$- construit



Demonstrație

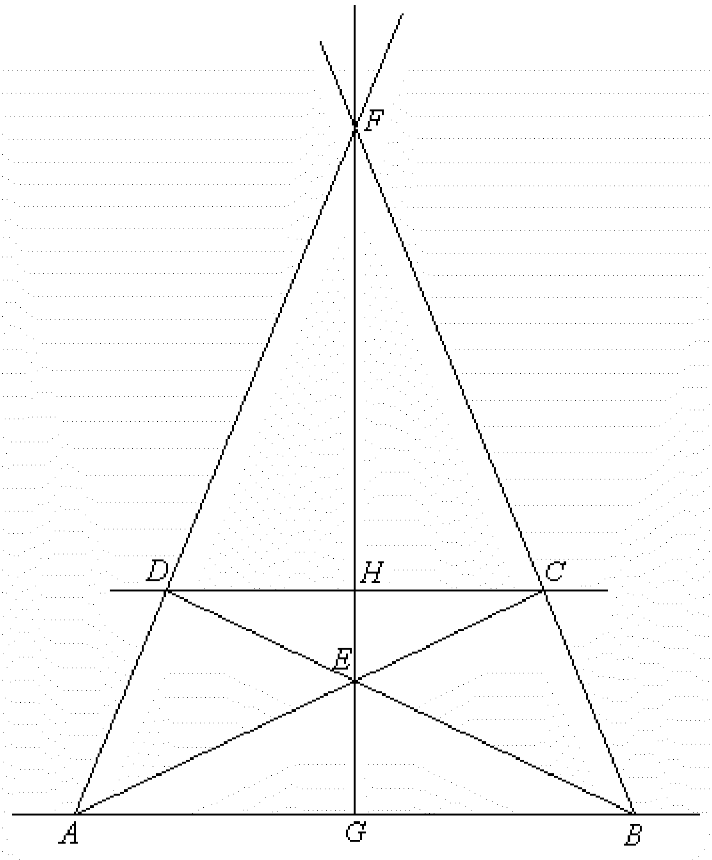
Conform afirmației duale a lui Desargues dacă laturilor respective ale ΔEGI și ΔCDB se intersectează în 3 puncte {F, H, G}, atunci dreptele ce unesc vîrfurile respective se intersectează într-un punct {A}.

În continuare vom analiza problemele ce se rezolvă cu rigla unilaterală aplicînd lema trapezului:

Dacă prin punctul E, care este intersecția diagonalelor trapezului ABCD și F care este intersecția laturilor ne paralele, se duce o dreaptă atunci această dreaptă împarte bazele trapezului în jumătate.

$$AG:GB=DH:HC$$

Considerînd *G*-mijlocul bazei *AB*, iar *H*-mijlocul bazei *DC*.



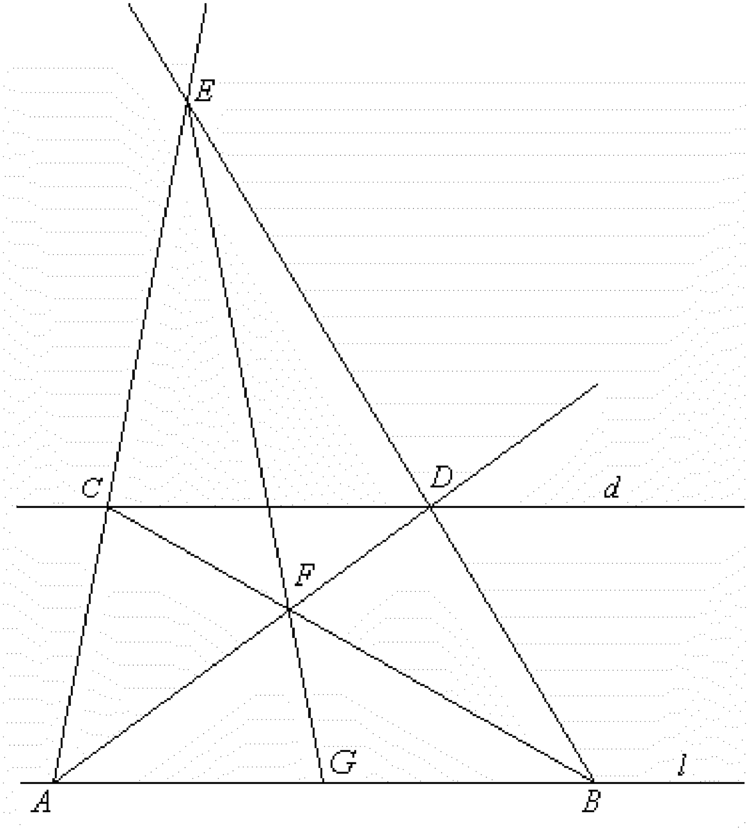
Exemplul II:

Pe o dreaptă *l* sunt date 3 puncte *A, G*, şi *B*. Se ştie că *G* este mijlocul segmentului *AB*. Să se construiască cu rigla unilaterală o dreaptă *d* ce trece printr-un punct *C* paralel la dreapta *l*.

Construcția

1. $E \notin l : C \in [AE]$
2. $[BC]$ şi $[BE]$
3. $[EG] \cap [BC] = F$
4. $[AF) \cap [BE] = D$

(CD)- construit



Demonstrația este direct consecință a lemei trapezului.

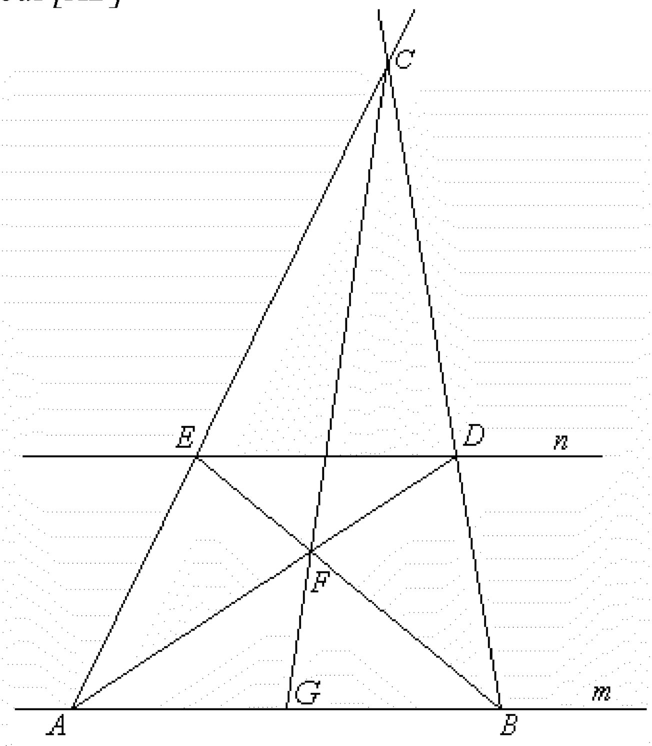
Exemplul III:

Sunt date 2 drepte paralele m, n şi segmentul AB pe dreapta m. Să se împartă acest segment în jumătate doar cu rigla unilaterală.

Construcția

1. $C \notin n, m$
2. $[CA] \cap n = E$
3. $[CB] \cap n = D$
4. $[AD] \cap [BE] = F$
5. $(CF) \cap [AB] = G$

G-mijlocul *[AB]*



Exemplul IV:

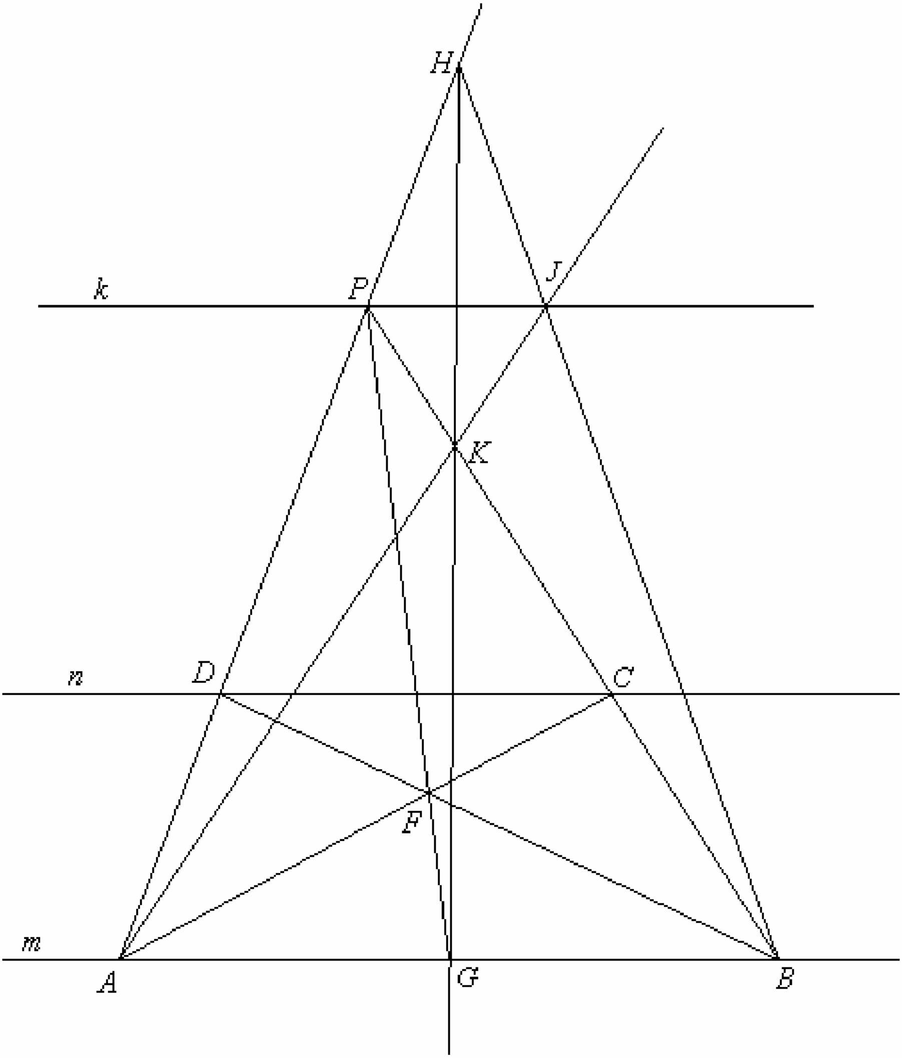
Sînt date 2 drepte paralele m , n şi un punct P ce nu aparține acestor drepte. Să se construiască cu rigla unilaterală prin punctul P o dreapta paralelă cu cele date.

Împărțim un segment în jumătate luat la întîmplare pe una din cele două drepte paralele (Problema 3) apoi problema se reduce la rezolvarea Problemei 2.

Construcția

1. $[PA] \cap n = D$
2. $[PB] \cap n = C$
3. $[BD] \cap [AC] = F$
4. $(PF) \cap m = G$
5. $H \notin m,n : [HA] > [PA]$
6. $[PB]$ şi $[BH]$
7. $[HG] \cap [PB] = K$
8. $[AK) \cap [BH] = J$

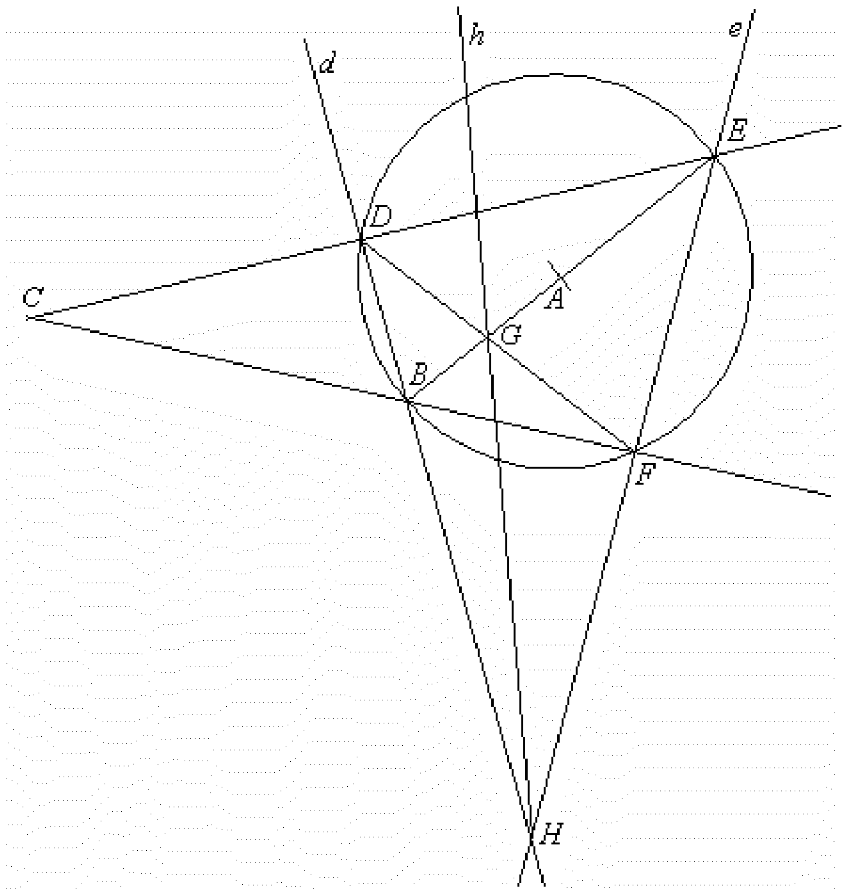
$[PJ]$- construit



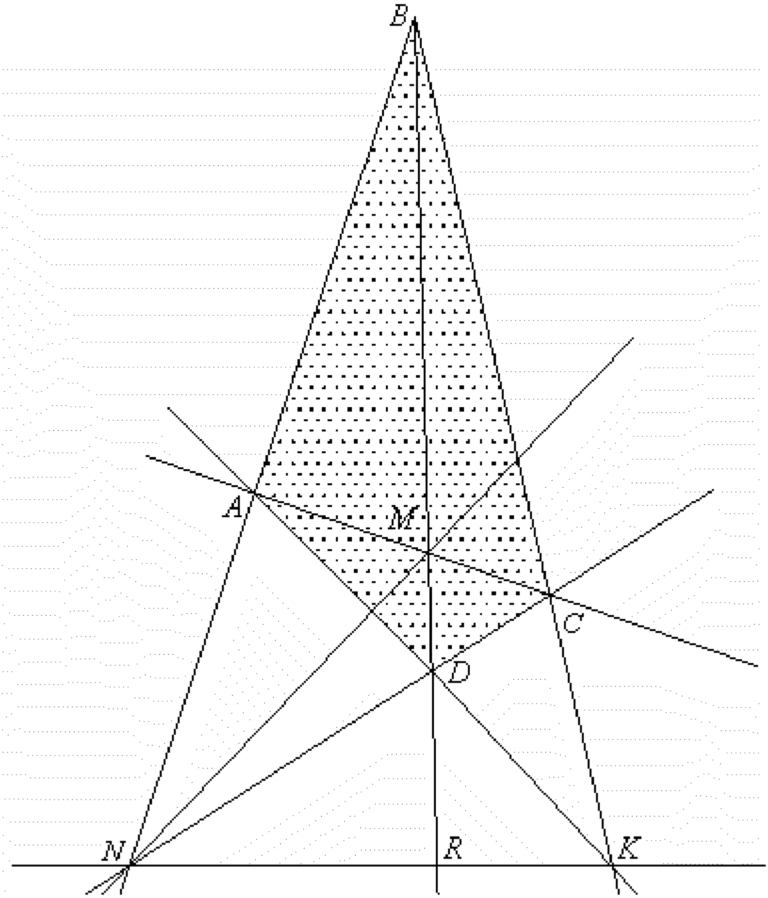
În continuare vom analiza problemele ce se rezolvă cu rigla unilaterală dacă este dat un cerc şi centrul său. Pentru construcțiile date vom utiliza cunoscuta teoremă.

Teoremă: *Fie prin punctul* $C \notin \omega$ *se duc două drepte ce intersectează cercul* $\omega(A, AB)$ *în punctele {B}, {F}şi respectiv {D}, {E} atunci locul geometric al punctelor de intersecţie al dreptelor (BD) cu (FE) şi locul geometric de intersecţie a dreptei (BE) cu (FD) se află pe o dreapta h.*

În condiţiile teoremei vom numi dreapta h polara punctului C în raport cu cercul ω iar punctul C polul dreptei h. Dacă G este considerat pol atunci polara lui este dreapta ce trece prin punctele C şi H.



Definiție: *Numim tetracuspid complet figura alcătuită din 4 puncte, oricare 3 din care nu se află pe o dreapta și 6 drepte ce unesc aceste puncte 2 cîte 2.*



În desen tetracuspidul complet este dat de:
A, B, C, D - vîrfurile,
BD, CD, DA, BD, AC-laturile,
N, K, M-puncte diagonale.

Teoremă: *Dacă tetracuspidul complet este înscris în cercul* ω *atunci fiecare din diagonalele lui reprezintă polara punctului diagonal ce nu-i aparține acestei diagonale.*

Probleme propuse:

1. Împărțiți unghiul dat $\angle$AEB în jumătate daca punctul E este inaccesibil cunoscut(determinat de dreptele A$\in$a si B$\in$b)
2. Construiți medianele triunghiului, vîrfurile caruia sint inaccesibile cunoscute.
3. Construiți înălțimile triunghiului, vîrfurile caruia sint inaccesibile cunoscute.
4. Duceți tangenta la cercul $\boldsymbol{\omega}$ în punctul dat A, dacă centrul cercului este inaccesibil cunoscut.
5. Duceți prin punctul dat D în exteriorul cercului $\omega(A,AB)$ tangentele la ω numai cu rigla unilaterală.
6. Fie da o dreaptă *a* ce trece prin centrul cercului $\omega(A,AB)$, să se construiască cu rigla unilaterală o dreaptă perpendiculară dreptei *a*.
7. Se dă o dreaptă *d* ce trece prin centrul cercului $\omega(A,AB)$ şi un punct $P \notin d$.Să se construiască cu rigla unilaterală, o dreaptă paralelă cu *d* ce trece prin punctul *P*.
8. Se dă o dreaptă *d* ce intersectează cercul $\omega(A,AB)$ în punctele *C* şi *D*. Să se construiască cu rigla unilaterală, o dreaptă paralelă cu dreapta *d*.
9. Se dă o dreaptă *g* ce nu intersectează cercul $\omega(M,MR)$. Să se construiască cu rigla unilaterală, o dreaptă paralelă cu *g* prin punctul $H \notin g$.

10. Se dă cercul $\omega(M,MR)$. Să se construiască, cu rigla unilaterală, prin punctul dat P o dreaptă ce va forma cu dreapta dată *(FE)* un unghi egal cu unghiul dat ANC.
11. Sînt date doua drepte paralele şi un punct oarecare în afara acestor drepte. Duceți prin acest punct o dreaptă paralelă la cele date, folosind doar rigla unilaterală.
12. Într-un cerc este dus diametrul si două coarde paralele. Construiți centrul cercului, folosind rigla unilaterală.

Bibliografie

1. Gheorghe Buicliu, Probleme de construcţii geometrice cu rigla şi compasul, Editura Tehnica, Bucureşti.
2. Б. И. Аргунов, М. Б. Балк, Элементарная геометрия, Москва 1966.
3. A.V. Pogorelov. Geometria, Chişinău, Lumina, 1983.
4. Mihăileanu, N.. Elemente de geometrie proiectivă: [manual universitar]/ N. Mihăileanu. Bucureşti: Editura Tehnica, 1966.-340p..
5. Аргунов Б. И., Балк М. В.. Элементарная геометрия: Издателъство “Просвешение”, Москва 1966.
6. Аргунов Б. И., Балк М. В.. Геометрические простроения на плоскости: “учпедгиз”, Москва 1957.
7. Адлер Август Теория геометрических простроений: Лениниград 1940.
8. Tóth, A., Noţiuni de teoria construcţiilor geometrice, E. D. P. Bucureşti, 1963.
9. D. Andrica, Cs. Varga, Văcăreţu, D. Teme alese de geometrie, Ed. Plus, 2002.
10. A. Kostovskii, Geometrical Construction with Compasses Only, Mir Publishers, Moscow, 1986.