CZU:372.851

APLICAȚII ALE METODEI COEFICIENȚILOR NEDETERMINAȚI

COZMA Dumitru, SALI Larisa,

Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. *În lucrare sunt prezentate unele aplicații ale metodei coeficienților nedeterminați la rezolvarea problemelor din algebră și analiza matematică.*

Cuvinte-cheie: *polinom, ecuații polinomiale, metoda coeficienților nedeterminați.*

Abstract. *In this paper some applications of the method of undetermined coefficients to solving problems in algebra and mathematical analysis are presented.*

Keywords: *polynomial, polynomial equations, the method of undetermined coefficients.*

Introducere

Există diferite modalități și metode de soluționare a problemelor matematice, dar una dintre ele eficientă, originală și, în același timp, simplă în aplicare este *metoda coeficienților nedeterminați*. Metoda coeficienților nedeterminați este folosită în matematică pentru a găsi coeficienții expresiilor ale căror formă este cunoscută în avans.

În opinia noastră, elucidarea specificului acestei metode este oportună din motiv că ea permite generalizarea și sistematizarea procedeelor de rezolvare a mai multor tipuri de probleme din cursurile gimnazial, liceal și universitar de matematică. Adesea ciclul de cunoaștere în cursul preuniversitar de matematică se încheie cu examinarea unor exemple concrete sau cu generalizări vagi, viabile pe o durată scurtă de timp. Abordarea sistemică a unor cicluri de probleme soluționarea cărora se pliază sub o metodă permite formarea la elevi și studenți a operațiilor mentale de generalizare, abstractizare, concretizare. În acest proces gândirea se ridică de la concret prin abstract la general, iar revenind la concret la următoarea fază, percepe acel concret mult mai bogat, cu noi amănunte, nebănuite la etapa inițială. Prin formarea metodei generale, a noțiunilor abstracte, se înlătură detaliile și relațiile neesențiale, însă fixând proprietățile esențiale obținem o nouă abstracțiune care acoperă toată bogăția cazurilor specifice și particulare [6].

Înainte de a considera aplicarea metodei coeficienților nedeterminați la rezolvarea diverselor tipuri de probleme, oferim unele noțiuni teoretice.

1. Elemente din teoria polinoamelor

Un *polinom de gradul* n în nedeterminata X se scrie în forma canonică astfel:

$$p(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_{n-1}X + a_n, \qquad (1.1)$$

unde $a_0 \neq 0$. Numerele $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sunt *coeficienții polinomului*. Dacă nu se precizează natura lor se consideră că coeficienții polinomului sunt *numere complexe*. Vom nota mulțimea polinoamelor cu coeficienți complecși de nedeterminata X prin $\mathbb{C}[X]$, respectiv prin $\mathbb{R}[X]$ cu coeficienți reali.

Polinoamele
$p(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_{n-1}X + a_n, \qquad a_0 \neq 0,$
$q(X) = b_0X^n + b_1X^{n-1} + b_{n-1}X + b_n, \qquad b_0 \neq 0,$
unde $p(X), q(X) \in \mathbb{C}[X]$, sunt *egale* dacă și numai dacă
$a_k = b_k, \ \forall k = \overline{0,n}.$

Fie polinomul (1.1) și $\alpha \in \mathbb{C}$. Numărul $p(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha + a_n, \ a_0 \neq 0,$ se numește *valoare a polinomului* $P(X)$ pentru $X = \alpha$.

Teorema 1.1 (teorema lui Bézout). Restul împărțirii polinomului $p(X)$ prin binomul $X - \alpha$ este egal cu $p(\alpha)$.

Numărul $\alpha \in \mathbb{C}$ se numește *rădăcină a polinomului* $p(X)$, dacă $p(\alpha) = 0$.

Prin urmare, conform teoremei lui Bézout, numărul $\alpha \in \mathbb{C}$ este rădăcina a polinomului $p(X)$ dacă și numai dacă $p(X)$ se divide prin binomul $X - \alpha$.

Numărul $\alpha \in \mathbb{C}$ se numește *rădăcină de multiplicitate* m *a polinomului* $p(X)$, dacă $p(X)$ se divide prin $(X - \alpha)^m$ și nu se divide prin $(X - \alpha)^{m+1}$.

Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este rădăcină de multiplicitate m a polinomului $p(X)$, atunci α este rădăcina și a polinoamelor $p'(X), p''(X), \cdots, p^{(m-1)}(X)$, și nu mai este rădăcină a polinomului $p^{(m)}(X)$, adică:
$p(\alpha) = p'(\alpha) = p''(\alpha) = \cdots = p^{(m-1)}(\alpha) = 0, \qquad p^{(m)}(\alpha) \neq 0.$

Teorema 1.2 (teorema lui Gauss). Orice polinom cu coeficienți complecși de grad mai mare sau egal cu unu are cel puțin o rădăcină complexă.

Teorema 1.3. Fie $f(X) \in \mathbb{R}[X], \ f \neq 0$. Dacă $\alpha = a + ib, b \neq 0$ este o rădăcină complexă a polinomului $f(X)$, atunci:

1) $\bar{\alpha} = a - ib$ este de asemenea rădăcină complexă a lui $f(X)$;

2) α și $\bar{\alpha}$ au același ordin de multiplicitate.

Teorema 1.4 (teorema de descompunere în factori ireductibili). Orice polinom

$$f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + a_{n-1}X + a_n, \quad a_0 \neq 0, \quad f(X) \in \mathbb{R}[X]$$

se poate scrie ca produs de polinoame de gradul întâi sau doi cu coeficienți reali.

Remarca 1.1. Orice polinom cu coeficienți reali de grad impar are cel puțin o rădăcină reală. În particular, un polinom de gradul trei se descompune în produsul unui factor liniar și a unui factor pătratic

$$a_0X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3 = a_0(X - b_1)(X^2 + c_1X + c_2). \qquad (1.2)$$

Remarca 1.2. Orice polinom cu coeficienți reali are un număr par de rădăcini complexe.

Remarca 1.3. Orice polinom de gradul patru se descompune într-un produs de polinoame de gradul doi

$$a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4 = a_0(X^2 + b_1X + b_2)(X^2 + c_1X + c_2). \qquad (1.3)$$

Teorema 1.5 (teorema împărţirii cu rest). Pentru orice polinoame $f(X), g(X) \in \mathbb{C}[X]$, $g(X) \neq 0$ există și sunt unice două polinoame $q(X), r(X) \in \mathbb{C}[X]$, astfel încât

$$f(X) = g(X)q(X) + r(X), \quad grad\, r(X) < grad\ g(X).$$

Fie $f(X)$, $g(X) \in \mathbb{C}[X]$, $g(X) \neq 0$. Polinomul $g(X)$ divide $f(X)$ dacă există un polinom $q(X) \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f(X) = g(X)q(X)$.

Se spune că polinomul $g(X)$ este un divizor a lui $f(X)$.

Fie $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ polinom neconstant cu gradul $n \geq 1$. Ecuația $f(X) = 0$ se numește *ecuație polinomială* sau *ecuație algebrică* asociată polinomului $f(X)$.

Teorema 1.6 (teorema fundamentală a algebrei). Orice ecuație algebrică

$a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0$

de grad mai mare sau egal cu unu și cu coeficienți complecși are cel puțin o rădăcină complexă.

2. Unele aplicații ale metodei coeficienților nedeterminați în algebră

Metoda coeficienților nedeterminați poate fi aplicată la rezolvarea unor exemple ce țin de divizibilitatea polinoamelor, calcularea valorilor unor expresii numerice și algebrice, rezolvarea unor ecuații și inecuații polinomiale, calcularea unor sume, descompunerea fracțiilor raționale regulate în fracții elementare.

Vom examina câteva exemple care pot fi generalizate pentru a forma abilități de rezolvare a problemelor prin metoda coeficienților nedeterminați.

Exemplul 2.1. Pentru care valori ale parametrilor a și b polinomul

$X^4 - X^3 - 9X^2 + aX - 10$

se divide la trinomul $X^2 + 2X + b$?

Soluție. Conform formulei (1.3), vom reprezenta polinomul de gradul patru sub formă de produs de polinoame de gradul doi:

$X^4 - X^3 - 9X^2 + aX - 10 = (X^2 + 2X + b)(X^2 + pX + q),$

unde p și q sunt coeficienți necunoscuți. Desfacem parantezele și grupăm termenii pe lângă aceleași puteri ale necunoscutei X:

$X^4 - X^3 - 9X^2 + aX - 10 = X^4 + (p+2)X^3 + (q + 2p + b)X^2 + (2q + bp)X + bq.$

Identificăm coeficienții în egalitatea de mai sus și obținem:

$$\begin{cases} p + 2 = -1 \\ q + 2p + b = -9 \\ 2q + bp = a \\ bq = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -3 \\ q = -3 - b \\ 2q - 3b = a \\ b^2 + 3b - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -3 \\ q = -3 - b \\ a = -5b - 6. \\ \left[\begin{array}{l} b_1 = -5 \\ b_2 = 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Dacă $b_1 = -5$, atunci $a_1 = 19$, iar dacă $b_2 = 2$, atunci $a_2 = -16$.

Răspuns: $a_1 = 19,\ b_1 = -5$ sau $a_2 = -16,\ b_2 = 2$.

Exemplul 2.2. Să se calculeze valoarea expresiei $9x + 11y - 6z + 7t + 5m$, dacă

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + t + m = 4 \\ -x + y + 2z - 3t - m = -3. \end{cases}$$

Soluție. Fie α și β coeficienți nedeterminați, atunci reprezentăm:

$$9x + 11y - 6z + 7t + 5m = \alpha(2x + 3y - z + t + m) + \beta(-x + y + 2z - 3t - m),$$

$$9x + 11y - 6z + 7t + 5m =$$

$$= (2\alpha - \beta)x + (3\alpha + \beta)y + (-\alpha + 2\beta)z + (\alpha - 3\beta)t + (\alpha - \beta)m.$$

Egalăm coeficienții de pe lângă x, y, z, t și m. Obținem sistemul

$$\begin{cases} 9 = 2\alpha - \beta \\ 11 = 3\alpha + \beta \\ -6 = -\alpha + 2\beta \\ 7 = \alpha - 3\beta \\ 5 = \alpha - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 4. \end{cases}$$

Prin urmare, substituind α și β, avem

$$9x + 11y - 6z + 7t + 5m = 4 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) = 19.$$

Răspuns: 19.

Exemplul 2.3. Să se determine valorile parametrului m, încât ecuația

$$2X^3 - 4X^2 - 8X + m = 0$$

să aibă două soluții reale distincte.

Soluție. Așa cum ecuația are doar două soluții reale distincte, atunci polinomul asociat ecuației poate fi descompus în factori

$$2X^3 - 4X^2 - 8X + m = 2(X - \alpha)^2(X - \beta),$$

unde α și β sunt soluțiile acestei ecuații.

Desfacem parantezele și grupăm termenii pe lângă aceleași puteri ale lui X:

$$2X^3 - 4X^2 - 8X + m = 2X^3 + (-2\beta - 4\alpha)X^2 + (4\alpha\beta + 2\alpha^2)X - 2\alpha^2\beta.$$

Folosim metoda coeficienților nedeterminați și obținem:

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ -4 = -2\beta - 4\alpha \\ -8 = 4\alpha\beta + 2\alpha^2 \\ m = -2\alpha^2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 - 2\alpha \\ 2\alpha(2 - 2\alpha) + \alpha^2 = -4 \\ m = -2\alpha^2(2 - 2\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 - 2\alpha \\ 3\alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0 \\ m = -2\alpha^2(2 - 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 2 - 2\alpha \\ \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -2/3 \end{array}\right. \\ m = -2\alpha^2(2 - 2\alpha) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = 16 \\ m_2 = (-80)/27. \end{array}\right.$$

Răspuns: $m_1 = 16$ sau $m_2 = -80/27$.

Exemplul 2.4. Să se demonstreze că pentru orice valoare reală a lui x, are loc inegalitatea

$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 24 > 0.$

Soluție. Inegalitatea poate fi demonstrată, dacă vom arăta ca polinomul asociat ecuației poate fi reprezentat ca o sumă de termeni pozitivi. Cu acest scop, vom reprezenta polinomul astfel

$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 24 = (x^2 + ax + b)^2 + c,$

unde a, b, c sunt coeficienți necunoscuți. Desfacem parantezele și grupăm termenii:

$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 24 = x^4 + 2ax^3 + (2b + a^2)x^2 + 2abx + b^2 + c.$

Identificăm coeficienții și obținem:

$$\begin{cases} 2a = -4 \\ 2b + a^2 = 12 \\ 2ab = -16 \\ b^2 + c = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \\ c = 8 \end{cases}.$$

Avem inegalitatea $(x^2 - 2x + 4)^2 + 8 > 0,$ care se realizează pentru toate valorile lui x.

În manualul pentru clasa a IX-a sunt propuse un șir de exemple care pot fi soluționate folosind metoda coeficienților nedeterminați [1, pp. 66, 69, 70, 71, 74, 79]. În Curriculumul la matematică pentru liceu studierea polinoamelor și fracțiilor algebrice este prevăzută în clasa a X-a [8, p.14].

Unele exemple, care necesită restrângerea pătratului perfect pot fi rezolvate prin metoda coeficienților nedeterminați. În clasa a VII-a exemplele de acest tip se rezolvă prin metoda încercărilor [2, p. 82-86]. Metoda coeficienților nedeterminați simplifică rezolvarea și permite algoritmizarea acesteia.

Exemplul 2.5. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $\sqrt{88 - 30\sqrt{7}}$.

Soluție. Vom utiliza descompunerea

$$88 - 30\sqrt{7} = \left(a + b\sqrt{7}\right)^2,$$

unde a și b sunt coeficienți necunoscuți. Avem:

$$88 - 30\sqrt{7} = (a^2 + 7b^2) + 2ab\sqrt{7},$$

Egalăm coeficienții și obținem

$$\begin{cases} 88 = a^2 + 7b^2, \\ -30 = 2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 7b^2 = 88, \\ ab = -15. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -5 \\ b = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Prin urmare, găsim $\sqrt{88 - 30\sqrt{7}} = \sqrt{\left(5 - 3\sqrt{7}\right)^2} = \left|5 - 3\sqrt{7}\right| = 3\sqrt{7} - 5.$

Răspuns: $3\sqrt{7} - 5.$

Exemplul următor poate servi drept caz particular pentru o suită de generalizări.

Exemplul 2.6. Să se calculeze suma

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}.$$

Soluție. Vom nota

$$a_k=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)},$$

atunci această sumă poate fi scrisă sub forma:

$$S=\sum_{k=1}^{50}a_k=\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Suma poate fi calculată folosind metoda coeficienților nedeterminați. Reprezentăm a_k astfel:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}=\frac{A(2k+1)+B(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)},$$

unde A și B sunt constante necunoscute. Proprietatea de egalitate a două fracții raționale implică

$$A(2k+1)+B(2k-1)=1 \iff (2A+2B)k+(A-B)=1.$$

Identificăm coeficienții și obținem sistemul

$$\begin{cases}2A+2B=0\\ A-B=1\end{cases} \iff \begin{cases}B=-A\\ A=1/2\end{cases} \iff \begin{cases}B=-1/2\\ A=1/2\end{cases}.$$

Astfel avem

$$a_k=\frac{\frac{1}{2}}{2k-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{2k+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right),$$

iar suma poate fi reprezentată astfel

$$S=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{95}-\frac{1}{97}\right)+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{101}\right]=\frac{50}{101}.$$

Răspuns: $\frac{50}{101}$.

Astfel de exemple sunt utile când se intenționează familiarizarea elevilor cu esența metodei inductive de descoperire a unor legități matematice. Un sistem de exerciții la acest capitol este prezentat în culegerea de probleme și teste pentru clasa a V-a [9, pp. 83-85]. Exercițiile propuse au menirea să dezvolte spiritul de observație al elevului, permit realizarea de generalizări cu privire la comportamentul unor șiruri numerice particulare, formularea și verificarea unor ipoteze etc. Creșterea gradului de dificultate al sarcinilor de acest tip poate fi realizată prin diversificarea relațiilor dintre termenii sumelor, mărirea numărului de fracții elementare în care poate fi descompusă o fracție complexă, introducerea la numitorul fracției a factorilor ireductibili de gradul al doilea etc. [12].

Exemplul 2.7. Să se calculeze suma:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Reprezentăm a_k astfel:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} + \frac{D}{k+3} =$$
$$= \frac{A(k+1)(k+2)(k+3) + Bk(k+2)(k+3) + Ck(k+1)(k+3) + Dk(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Atunci $1 = k^3(A+B+C+D) + k^2(6A+5B+4C+3D) + k(11A+6B+3C+2D) + 6A.$

Identificăm coeficienții și obținem sistemul:

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ A+B+C+D = 0 \\ 6A+5B+4C+3D = 0 \\ 11A+6B+3C+2D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \\ D = -\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Efectuând transformarea fiecărui termen al sumei date și reducând termenii asemenea ai sumei obținute, vom avea o sumă care ușor poate fi adusă la o formă mai simplă sau adaptată la un exemplu concret cu indicarea unei valori a lui *n*:

$$S_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right).$$

3. Unele aplicații în analiza matematică

Metoda coeficienților nedeterminați poate fi aplicată cu succes la calcularea unor integrale, rezolvarea unor ecuații funcționale, rezolvarea unor ecuații diferențiale.

Exemplul 3.1. Să se calculeze integrala nedefinită

$$\int (x^3 + 2x^2 + 5)e^x dx. \qquad (3.1)$$

Soluție. Integrala (3.1) poate fi calculată aplicând de trei ori formula integrării prin părți [3]

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Mai eficient ar fi să calculăm integrala (3.1) aplicând metoda coeficienților nedeterminați [11]. Așa cum sub semnul integralei figurează un polinom de gradul trei, vom căuta primitiva sub forma

$$\int (x^3 + 2x^2 + 5)e^x dx = (ax^3 + bx^2 + cx + g)e^x + C, \qquad (3.2)$$

unde a, b, c, g sunt coeficienți necunoscuți ai polinomului, iar C este o constantă arbitrară.

Pentru a determina coeficienții necunoscuți din (3.2), derivăm egalitatea de mai sus și folosim proprietatea pentru integrala nedefinită $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. Obținem

$(x^3+2x^2+5)e^x = \left((ax^3+bx^2+cx+g)e^x + C\right)'$,

$(x^3+2x^2+5)e^x = (3ax^2+2bx+c+0)e^x + (ax^3+bx^2+cx+g)e^x + 0$.

Simplificăm această egalitate cu e^x și grupăm coeficienții în membrul stâng:

$$x^3+2x^2+5 = ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+g).$$

Identificăm coeficienții în egalitatea de mai sus și obținem:

$$\begin{cases} a=1 \\ 3a+b=2 \\ 2b+c=0 \\ c+g=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \\ g=3 \end{cases}.$$

Substituim coeficienții determinați și găsim valoarea integralei

$\int (x^3+2x^2+5)e^x dx = (x^3-x^2+2x+3)e^x + C$.

Răspuns: $(x^3-x^2+2x+3)e^x + C$.

Metoda poate fi aplicată la rezolvarea unor ecuații funcționale. Prin ecuație funcțională vom înțelege o ecuație în care funcția necunoscută este legată cu funcția cunoscută (dată) prin operații de obținere a funcției compuse. În analiza matematică sunt cunoscute ecuațiile funcționale:

- ecuația lui Cauchy $f(x+y)=f(x)+f(y)$;
- ecuația lui D'Alambert $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$;
- ecuația lui Lobacevski $f^2(x)=f(x-y)\cdot f(x+y)$.

Diverse aspecte ale metodologiei de abordare a procesului de rezolvare a ecuațiilor funcționale pot fi examinate în lucrările [4, 5, 7].

Exemplul 3.2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface ecuației funcționale

$$2f(x)+f(1-x)=x^2.$$

Determinați $f(x)$.

Soluție. Așa cum în membrul stâng al ecuației asupra variabilei independente x și valorilor funcției se efectuează doar operații liniare, iar în membrul drept al ecuației avem o funcției pătratică, vom presupune că funcția $f(x)$ la fel este pătratică:

$f(x)=ax^2+bx+c$,

unde a, b, c sunt coeficienți reali necunoscuți. Substituim această funcție în ecuația funcțională și obținem

$$2(ax^2+bx+c)+a(1-x)^2+b(1-x)+c=x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$3ax^2+(b-2a)x+(a+b+3c)=x^2$.

Identificăm coeficienții în egalitatea de mai sus și obținem:

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ a + b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 2/3 \\ c = -1/3. \end{cases}$$

Astfel, funcția căutată are forma

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

și este soluția ecuației funcționale.

Răspuns: $f(x) = (x^2 + 2x - 1)/3$.

Exemplul 3.3. Să se afle soluţia ecuaţiei diferenţiale $y'' - x^3y' - xy = x^2 + 2xe^x + 7$ cu condiţiile inițiale $y(0) = 5$ și $y'(0) = 8$.

Soluție. Ecuația examinată are forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.3}$$

în care coeficienţii pot fi considerați sume ale unor serii de puteri

$$p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k x^n$$

convergente în careva interval $(-r, r)$ al axei reale. Pentru orice condiţii iniţiale $y(x_0) = y_0$ şi $y'(x_0) = y'_0$, ecuația (3.3) posedă în intervalul $(-r, r)$ o unică soluţie de forma

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_kx^k + \cdots \tag{3.4}$$

Coeficienţii a_k din (3.4) pot fi determinați cu ajutorul metodei coeficienţilor nedeterminaţi [10]. Derivăm seria (3.4) termen cu termen de două ori în intervalul $(-r, r)$, obținem:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots,$$

$$y'' = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \cdots + k(k-1)a_kx^{k-2} + \cdots,$$

Ținând cont de condițiile inițiale ($x_0 = 0$; $y_0 = 5$; $y'_0 = 8$), aflăm $a_0 = 5$ și $a_1 = 8$. Substituind expresiile pentru y, y' și y'' în ecuația dată, obţinem:

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots + k(k-1)a_kx^{k-2} + \cdots -$$

$$-x^3(8 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots) -$$

$$-x(5 + 8x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_kx^k + \cdots) =$$

$$= x^2 + 2x\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots\right) + 7.$$

Grupăm termenii de pe lângă aceleași puteri a necunoscutei x:

$$2a_2 + (6a_3 - 5)x + (12a_4 - 8)x^2 + (20a_5 - 8 - a_2)x^3 +$$

$$+(30a_6 - 2a_2 - a_3)x^4 + \cdots = 7 + 2x + 3x^2 + x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{12}x^5 + \cdots$$

Egalând coeficienții de pe lângă puterile respective ale lui x, avem:

$$2a_2 = 7, \; 6a_3 - 5 = 2, \; 12a_4 - 8 = 3, \; 20a_5 - 8 - a_2 = 1, \cdots$$

sau

$$a_2 = \frac{7}{2},\ a_3 = \frac{7}{6},\ a_4 = \frac{11}{12},\ a_5 = -\frac{7}{40}, \cdots$$

Soluția ecuației diferențiale a fost obținută sub formă de serie de puteri

$$y = 5 + 8x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{11}{12}x^4 - \frac{7}{40}x^5 + \cdots$$

Am obținut soluția particulară a ecuației diferențiale reprezentată printr-o serie de puteri.

Răspuns: $y = 5 + 8x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{11}{12}x^4 - \frac{7}{40}x^5 + \cdots$.

În concluzie, putem afirma că punerea în relație a diverse procedee și tehnici de rezolvare a unor problem particulare, sistematizarea informațiilor cu privire la aplicarea lor în diverse compartimente ale matematicii se poate încununa cu elaborarea unor generalizări de ordin metodologic. În educația matematică aceasta reprezintă o cale de formalizare a raționamentelor.

O condiție pentru eficiența metodei este ca să rezulte dintr-o teorie anterioară, verificată în practică. Metoda este strâns legată de conținuturile cercetate, de cele mai intime particularități ale acestora. Particularizarea sau adecvarea metodei la obiect permite dezvăluirea tezaurului de proprietăți ale categoriilor (claselor) de obiecte examinate, raționamentele fiind realizate deja la un alt nivel cognitiv.

Bibliografie

1. Achiri, I.; Braicov, A.; Șpuntenco, O. *Matematică*. Manual pentru clasa a 9-a. Chișinău: Ed. Prut Internațional, 2016. 228 p.
2. Achiri, I.; Braicov, A.; Șpuntenco, O. *Matematică*. Manual pentru clasa a 7-a. Chișinău: Ed. Prut Internațional, 2018. 232 p.
3. Achiri, I.; Ciobanu, V., ș.a. *Matematică*. Manual pentru clasa a 12-a. Chișinău: Ed. Prut Internațional, 2017. 264 p.
4. Choban, M.; Sali, L. On solutions of functional equations with linear translations. In *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, Vol. 45(2), 2018, p. 283-289.
5. Choban, M.; Sali, L. On solutions of functional equations with polynomial translations. In *Creative Mathematics and Informatics*. Vol. 28, No. 1, 2019, p. 53-59.
6. Cioban, M.; Cioban-Pileţcaia, A.; Sali, L. Rolul problemelor generale în organizarea învăţării autoreglate. *Revista Artă şi educaţie artistică*., USB, 2013.
7. Drimbe, M.-O. *200 de ecuații funcționale pe N, Z, Q*. Zalău: Ed. GIL, 2003. 255 p.
8. *Matematică*: *Curriculum național*: Clasele 10-12: Curriculum disciplinar: Ghid de implementare / Ministerul Educaţiei, Culturii şi Cercetării al Republicii Moldova;

coordonatori: Angela Cutasevici, Valentin Crudu, Valentina Ceapa; grupul de lucru: Ion Achiri (coordonator) [et al.]. – Chişinău: Lyceum, 2020. 192 p.

9. Raischi, V. *Probleme și teste pentru clasa a V-a*. București: Ed. Sigma, 1994. 152 p.
10. Zambițchi, D.; Ciobanu, I.; Cozma, D. *Ecuații diferențiale ordinare*. Chișinău: Evrica, 2004. 86 p.
11. Марон, И.А. *Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функции одной переменной*). М.: Наука, 1973. 399 с.
12. Петраков, И. С. *Математические кружки в 8-10 классах: книга для учителя.* М.: Просвещение, 1987. 224 с.

CZU:372.851

CARACTERISTICILE PROCESULUI DE FORMARE A COMPETENȚEI MATEMATICE LA VIITORII ÎNVĂȚĂTORI AI CLASELOR PRIMARE

HAJDEU Mihaela, doctorandă,

Universitatea de Stat din Tiraspol

BORDAN Valeriu, doctor, conf. univ.,

Universitatea de Stat din Tiraspol

Rezumat. *Competența matematică este un concept destul de abordat atât la nivel național prin prisma evaluărilor naționale cât și la nivel internațional prin evaluările TIMSS, PISA, etc. În acest context un rol important îl constituie nivelul de pregătire al cadrelor didactice în domeniul matematicii, în special al învățătorilor din învățământul primare, care pun baza procesului instructiv-educativ. Astfel, acest articol scoate în evidență caracteristicile procesului de formare a competenței matematice la viitorii învățători ai claselor primare, care urmează să predea această disciplină academică în învățământul primar.*

Cuvinte - cheie: *competența matematică, învățământ primar, învățător.*

Abstract. *Mathematical competence is a concept quite approached both at the national level in terms of national assessments and at the international level through TIMSS, PISA, etc. assessments. In this context, an important role is played by the level of training of teachers in the field of mathematics, especially of teachers in primary education, which form the basis of the instructive-educational process. Thus, this article highlights the characteristics of the process of training mathematical competence in future primary school teachers, who are to teach this academic discipline in primary education.*

Keywords: *mathematical competence, primary education, teacher*.

La etapa actuală, mereu în schimbare, educația a trecut și ea printr-un șir de modificări orientându-se spre dezvoltarea umană liberă, spre inițiativa creativă, spre independența elevilor, competitivitate și mobilitatea viitorilor specialiști. În acest sens se poate observa că deși elevii din