CZU:372.851:372.850

CÂTEVA EXEMPLE DE APLICAȚII INTERDISCIPLINARE

AMIHĂLĂCHIOAE Aniela, prof. grad I,
Școala Gimnazială ,,Ioan Murariu”, Cristinești, drd. UPS ,,Ion Creangă”
CHICHIOACĂ Alexia, elevă,
Colegiul Național ,,Grigore Ghica”, Dorohoi

Rezumat. *În prezentul articol se argumentează aplicabilitatea matematicii în studiul științelor naturale, și sunt descrise câteva exemple simple de aplicații care pot fi utilizate la treapta liceală. Se demonstrează astfel că aproape fiecare fenomen biologic poate avea o rezolvare abstractă, matematică, iar prin modelarea sa putem ajunge la concluzii mult peste nivelul estimativ al experimentatorului. Prin modelarea cu ajutorul funcțiilor matematice, este descoperit un timp și un cost optim, care ulterior creează beneficii.*

Cuvinte-cheie: *biomatematică, matematică, aplicații interdisciplinare, aplicații matematice, modele matematice, modele biologice.*

Abstract. *This article argues for the applicability of mathematics in the study of the natural sciences, and describes some simple examples of applications that can be used in high school. It is thus demonstrated that almost every biological phenomenon can have an abstract, mathematical solution, and by its modeling we can reach conclusions far beyond the estimated level of the experimenter. By modeling with the help of mathematical functions, an optimal time and cost is discovered, which subsequently creates benefits.*

Keywords: *biomathematics, mathematics, interdisciplinary applications, mathematical applications, mathematical models, biological models.*

Făcând referire la cunoașterea umană, sub toate aspectele sale, trebuie să avem în vedere și partea de diferențiere continuă a indivizilor, prin capacitatea cognitivă, nivelul de inteligență, mediul de viață de unde au dobândit anumite comportamente, inclusiv formele sub care aceștia acumulează informațiile, numite și ,,moduri de învățare”. Toate acestea au condus la formarea disciplinelor noi de studiu sau la o ,,integralizare” a materiei, atât la nivelul ariei curriculare cât și la nivelul disciplinelor conexe, prin partea de interdisciplinaritate. Astfel s-a amplificat posibilitatea însușirii informațiilor de către subiecți, conducând la o valorificare maximă a potențialului acestora intelectual.

,,În condițiile de creștere exponențială a informației, este reliefată necesitatea unor opțiuni pentru câmpuri cognitive integrate” [11].

Modelele matematice și abstractizările organismelor vii, analizele teoretice făcute pe baza unor principii care guvernează structura și dezvoltarea lumii vii precum și a comportamentelor unor sisteme, fac parte din biomatematică, sau latura matematică a biologiei, dacă o putem numi și așa. Practic, aproape toate procesele naturale pot fi modelate utilizând tehnici matematice. Această descriere se bazează pe simularea unor comportamente repetitive sau pe baza unor proprietăți care pot fi prezise, măcar la nivel de teorie și aproximație, și care ar putea să nu fie evidente pentru experimentator.

Încă din secolul al XIII-lea, când Fibonacci a folosit faimoasa serie Fibonacci pentru a descrie o populație de iepuri în creștere s-a folosit matematica în biologie. După aceasta, în secolul al XVIII-lea D. Bernoulli a aplicat calculul matematic pentru descrierea efectului variolei asupra populației umane. Tot pe o creștere exponențială s-a bazat în scrierea sa și Thomas Malthus, în 1789, când vorbea despre creșterea populației umane. Mai târziu, în 1836, P. F. Verhulst a formulat modelul creșterii logistice, iar în 1879, F. Müller a descris beneficiile evolutive, putându-i numele de mimetism Mullerian, care face referire la ecologia evolutivă și la importanța selecției naturale, cu excepția cazului creșterii populației („creștere geometrică”) în defavoarea existenței resurselor („creștere aritmetică”) [12].

Toate acestea conduc la ideea că biomatematica este o ramură dinamică a matematicii, cu beneficii reale asupra societății și mai ales asupra cercetării, iar un prim pas spre studierea acesteia trebuie făcut încă din cadrul liceului, prin implementare unor cursuri cu acest specific.

Prezentăm anterior câteva noțiuni preliminarii necesare aplicațiilor ulterioare.

Considerăm o populație statistică L, cu un număr finit de indivizi, de volum V, pentru care o anume caracteristică T este codificată de valorile numerice $a_1, a, a_3, \dots, a_V$, nu neapărat distincte. Acest șir finit de numere se notează cu A = $a_1, a, a_3, \dots, a_V$, și poartă denumirea de serie de date.

Observația 1. În general, dacă identitatea indivizilor nu este importantă din punctul de vedere al analizei statistice, aceștia sunt doar numerotați, și aceasta va fi neglijată în etape ulterioare rezolvării problemelor.

Exemplul 1. A: 0, 1, 0, 0, 1, 0, 2, care este o serie statistică interpretată de o funcție

$$A: \{a, b, c, d, e, f, g\} \rightarrow \{0, 1, 2\},$$

cu A(a) = 0, A(b) = 1, A(c) = 0, A(d) = 0, A(e) = 1, A(f) = 0, A(g) = 2. În acest caz, populația este L = {a, b, c, d, e, f, g}.

Definiția 1. Distribuția de frecvențe asociată caracteristicii T a populației L de volum V este: A = $\begin{pmatrix} a_1 a_2 a_3 \dots a_p \\ v_1 v_2 v_3 \dots v_p \end{pmatrix}$, unde a_j, unde $j = \overline{1,p}$ sunt valorile diverse înregistrate de caracteristica T, iar v_j, $j = \overline{1,p}$, reprezintă numărul de indivizi din populație caracterizați de valoarea a_j. Acest număr v_j se numește frecvența absolută de apariției a valorii a_j.

Observația 2. Din definiția frecvențelor relative avem că$\sum_{j=1}^{p} v_j$ = V.

Observația 3. Unei caracteristici i se poate asocia și distribuția frecvențelor relative $A_r = \begin{pmatrix} a_1 a_2 a_3 \dots a_p \\ g_1 g_2 g_3 \dots g_p \end{pmatrix}$, unde $g_p = \frac{v_j}{V}$. În acest caz $\sum_{j=1}^{p} g_j = 1$. Această frecvență relativă poate fi interpretată ca fiind probabilitatea ca valoarea a_j să fie luată de caracteristica T, iar distribuția frecvențelor relative este de fapt o variabilă aleatoare.

Exemplul 2. Pentru o serie de date **A:** 0, 1, 2, 3, 5, 5, 2, 1, distribuția de frecvențe este A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, iar cea a frecvențelor relative este A_r = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Seriile statistice sunt reprezentate grafic prin diverse tipuri de diagrame (prin segmente verticale, poligonul frecvențelor, histograme cu bare, prin sectoare circulare, etc.), pentru care caracteristica este măsurată cantitativ (exprimarea făcându-se prin numere reale).

În cele ce urmează vom prezenta câteva exemple simple de utilizare a matematicii în studiile biologice, care pot fi valorificate și în cadrul liceului.

Exemplul 3. O colonie de bacterii a fost supusă studiului pe parcursul a două zile. Masa ei inițială era de 20 g, după prima zi era de 40 de g, iar după cea de a doua zi, masa ei a devenit 320 g. Ni se cere să calculăm ritmul mediu de creștere.

Se poate observa că masa acestei colonii s-a dublat după prima zi, și apoi s-a multiplicat de 8 ori după a doua zi. Dacă am calcula inițial masa aritmetică se constată că obținem m_a = $\frac{2+8}{2}$ = 5. Dacă revenim la calculul inițial, după prima zi colonia ar trebui să aibă 20 · 5 = 100 g, iar a doua zi ar fi 100 · 5 = 500 g, ceea ce nu este corect, deci aproximarea prin media aritmetică nu dă o estimare corectă și concretă. Dacă indicele mediu de dinamică l-am obține prin media geometrică a dinamicilor individuale, atunci am avea următoarea valoare $\overline{a_p}$ = $\sqrt{2 \cdot 8}$ = 4. Atunci înlocuind, avem după prima zi o 20 · 4 = 80 g, (ceea ce iarăși nu dă corect), iar a doua zi ar fi 80 · 4 = 320 g, rezultat care se regăsește în valoarea inițială de creștere. În acest caz, o aproximare prin calculul mediei geometrice este mult mai apropiat de cel corect, și putem constata că se face o creștere cu un ritm mediu egal cu media geometrică a ritmurilor intermediare de creștere.

De obicei, indicatorii tendințelor centrale nu dau nici o explicație asupra modului de dispersare sau a modului în care termenii seriei se abat de la medie sau între ei, ceea ce necesită alte formule de calcul al altor indicatori. Aceştia trebuie să rezolve probleme precum:

- „verificarea reprezentativității mediei ca valoare tipică a seriei de distribuție;
- verificarea gradului de omogenitate a seriei;
- verificarea sistematizării informațiilor prin grupare statistică” [3].

Aceștia dau aproximări mult mai precise, prin care se poate cunoaște variația valorilor individuale (grupându-se în jurul valorii medii, apropiindu-se sau depărtându-se de ea), și se numesc indicatori de variație. Ei sunt:

- **amplitudinea** – reprezintă diferența dintre cea mai mare și cea mai mică valoare a seriei date (sau a distribuției de frecvențe);

- **abaterea medie absolută** – $e_a = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{p} v_i \cdot |a_i - \bar{a}|$;
- **variația(dispersia)** – $d_s^2 = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{V}(a_i - \bar{a})^2$;
- **abaterea medie pătratică** – $d_s = \sqrt{\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{V}(a_i - \bar{a})^2}$ [3].

Propoziție 1. Dispersia și abaterea medie pătratică ale unei distribuții de frecvențe A = $\begin{pmatrix} a_1 a_2 a_3 \dots a_p \\ v_1 v_2 v_3 \dots v_p \end{pmatrix}$, unde $\sum_{i=1}^{p} v_i$ = V se calculează formulele următoare:

$$d_s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p} a_i^2 \cdot v_i}{V} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot v_i}{V}\right)^2, \text{ respectiv } d_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p} a_i^2 \cdot v_i}{V} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot v_i}{V}\right)^2} \text{ [3].}$$

Exemplul 4. Să se calculeze cantitatea de deșeuri organice produse de o fermă în decursul a 50 zile consecutive, având înregistrările:

Cantitatea de deșeu produs zilnic „x_j”	Număr de zile în care s-a produs cantitatea de deșeu „n_i”	Frecvența relativă $\frac{n_i}{50}$
0	3	3/50
1	6	6/50
2	2	2/50
3	4	4/50
4	7	7/50
5	11	11/50
6	12	12/50
7	5	5/50

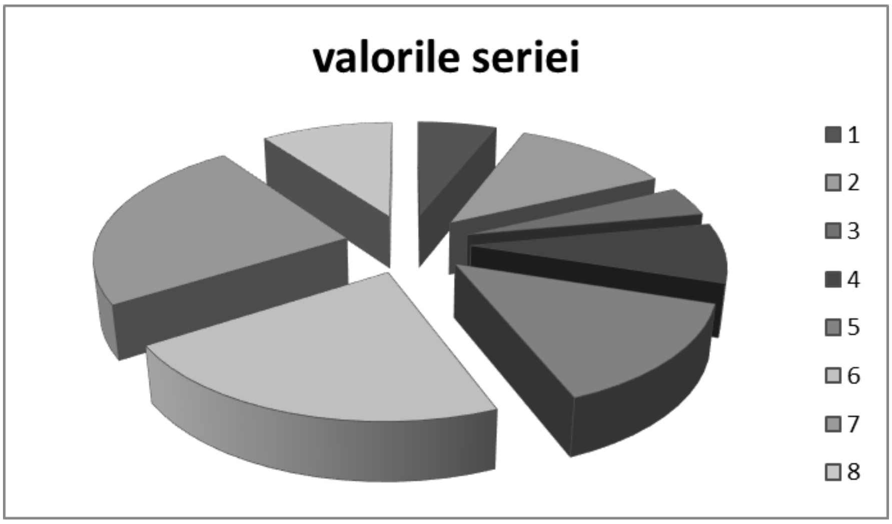
a) să se completeze coloana frecvențelor relative;

b) să se deseneze diagrama asociată datelor din tabel;

c) să se calculeze indicatorii de poziție (media, mediana, modul) și dispersia.

Pentru subpunctul a) A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{3}{50} & \frac{6}{50} & \frac{2}{50} & \frac{4}{50} & \frac{7}{50} & \frac{11}{50} & \frac{12}{50} & \frac{5}{50} \end{pmatrix}$.

Pentru b) vom avea următoarea diagramă:



c) indicatorii de poziție sunt:

- media $\bar{a} = \frac{0\cdot3+1\cdot6+2\cdot2+3\cdot4+4\cdot7+5\cdot11+6\cdot12+7\cdot5}{50} = 4.24$;

- mediana se calculează ținând cont de cei 50 de termeni din serie. Dacă scriem termenii seriei în ordine crescătoare, repetându-i de atâtea ori cât indică frecvența absolută, $a_{25} = a_{26} = 5$. Deci, m_e (A) $= \frac{5+5}{2} = 5$.

- modul este m_o (A) = 6 pentru că această valoare apare de cel mai multe ori.

- dispersia $d_s^2 = \frac{3\cdot0^2+6\cdot1^2+2\cdot2^2+4\cdot3^2+7\cdot4^2+11\cdot5^2+12\cdot6^2+5\cdot7^2}{50} - 17.97 = \frac{6+8+36+56+275+432+245}{50} - 17.97 = \frac{1058}{50} - 17.97 = 21.16 - 17.97 = 3.16$.

Șirul exemplelor poate continua, bazându-ne pe multitudinea cărților, și a cursurilor academice scrise pe aceste teme, însă importanța maximă este dată de valorificarea continuă a ascensiunii domeniului studiat precum și a aplicabilității sale practice.

Bibliografie

1. *Actas Bioquimica*. Calmodulina E ATP-ase de Calcio, 1989, 1:15-25.
2. Connelly, J.P.; Thomann, R.V. Wastox. *A framework for modelling the fate of toxic chemicals in aquatic environments*. Project Report, U,S. Environmental Protection Agency, Office of Research and Development, Environmental Research Laboratory - Duluth, large Lakes Research Station, Grosse Ile, Michigan, 1985.
3. Constantinescu, D. *Elemente de matematică aplicate în biologie*. Note de curs. Iași: Universitatea „Al. I. Cuza”.
4. Cristea, M. *Genetica ecologică şi evoluția*, Bucureşti: Editura Ceres, 1991.
5. Deutsch, A., Brush, L.; Byrne, H.; Vries, G.; Hauspeter, H. *Mathematical Modeling of Biological Systems.*Vol.I, Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, 2007.
6. Mayr, E. *This is biology*. Cambridge: Belknap Press de la Harvard University Press. ISBN 978-0-674-88469-4.
7. Popescu, S. *Modele matematice în ştiințe.* Bucureşti: Editura Matrix-Rom, 2010.
8. Raicu, P. (coordonator). *Biologie*: *Genetică şi evoluționism*: Manual pentru clasa a XII-a. Bucureşti: Editura Didactică şi Pedagogică, 1998.
9. Ştefănescu, D.T.; Călin, G. *Genetica şi cancerul: (Elemente de genetică şi patologie moleculară).* Bucureşti: Editura Didactică şi Pedagogică, 1996.
10. Sesiune festivă de comunicări științifice la nivel național, cu participare internațională, ediția a XIII-a, Colegiul Tehnic „Traian”, *Modele matematice în știință, tehnică și artă,* București, 16 mai 2009, ISSN: 2066 6985.

11. Ursu L. *Abordări integrate în formarea inițială a cadrelor didactice pentru învățământul primar la UPS ,,Ion Creangă” din Chișinău.*
12. https://gaz.wiki/wiki/ro/Theoretical_biology
13. www.descopera.org
14. www//ro.wikipedia.org
15. www.wikispace.com
16. http://daneremia.eu/mecanisme_neurale/receptori.html
17. www.scritub.com
18. http//encrypted-tbn2.gstatic.com
19. http//biocell4350.wikispaces.com
20. www.reumatologiaclinoca.org
21. http//crt.biomol.uci.edu.

CZU:372.851

MATEMATICA: ȘTIINȚĂ, ARTĂ, JOACĂ ȘI VOINȚĂ

BĂLĂNESCU Silviu, COJANU Veronica-Elena,

Liceul Teoretic „Dante Alighieri”, București, sector 3

Rezumat. *În articol sunt examinate diverse exemple din viață în care se regăsesc simetrii matematice, numite și „raportul de aur”, sau algebra lui phi, unde φ≈1,618. De asemenea sunt propuse diverse tipuri de activități de compunere a problemelor de către elevi, în scopul dezvoltării creativității, dar sunt și rezolvate unele exemple.*

Cuvinte-cheie: *matematică, raport, proporție, secțiune, problemă.*

Abstract. *The article examines various examples from life in which mathematical symmetries are found, also called the "golden ratio", or the algebra of phi, where φ≈1,618. Various types of activities for composition of problems by students are proposed, in order to develop their creativity, and also some examples are solved.*

Keywords: *mathematics, ratio, proportion, section, problem.*

1. Știință...și artă!

Numărul de aur

„Frumusețea se află în ochii celui care privește” așa cum afirma romanciera Margaret Wolfe Hungerford acum 134 de ani sau poate fi explicată rațional și determinată matematic? Frumusețea este subiectivă, irațională și inexplicabilă sau este rezultatul aplicării simetriilor și modelelor matematice precise? Într-adevăr frumusețea este subiectivă! Dar în cele mai convingătoare perfect balansate și de impact creații vizuale se regăsesc în mod evident simetrii matematice. Ce au în