DESPRE CONJECTURA $\frac{10}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

ON THE CONJECTURE $\frac{10}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

Boris Ţarălungă, dr. conf. univ.,
UPS ,,Ion Creangă"din Chişinău

Boris Ţarălungă, PhD, associate professor,
,,Ion Creanga" SPU of Chisinau
ORCID: 0000-0002-2477-9376

CZU: 511.52
DOI: 10.46728/c.v2.25-03-2022.p288-292

Rezumat

În această lucrare este rezolvată conjectura $\frac{10}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Cuvinte-cheie: Ecuații diofantiene, soluții naturale

Abstract

In this paper is solve of the conjecture $\frac{10}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Key-words: Diophantine equation; Natural solutions.

În teoria numerelor se studiază intens ecuațiile diofantiene [1-5],ecuații ce admit doar soluții întregi. În literatura de specialitate este bine cunoscută conjectura: pentru care numere naturale m, n există numerele naturale $x, y, z,$ încât să se verifice egalitatea $\frac{m}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Dacă $m=4$, atunci avem conjectura Erdos- Strauss. Dacă $m=5$, atunci avem conjectura Sierpinski. Dacă m =6, 7 atunci avem conjectura Aigner.

În lucrarea dată se rezolvă conjectura $\frac{10}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Teorema 1. Ecuația
$$\frac{10}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$
are soluțiile $(x,y,z)\in\{(1,3,3),(1,2,6)\}$.

Demonstrație. Vom considera că $z\geq y\geq x$. Deoarece $\frac{1}{x}<\frac{10}{6}$, rezultă că $x\geq 1$. Analog, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{3}{x}$. Atunci $\frac{10}{6}\leq\frac{3}{x}$, de unde $x\leq 1$. Deci $x\in\{1\}$.

Fie $=1$. Substituim și obținem ecuația
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}.$$
Din această ecuație rezultă
$$z=1+\frac{y+3}{2y-3}.$$
Observăm, că pentru $2y-3>y+3$, ecuația dată nu are soluții naturale. Rezultă că $y>6$. Atunci $y\in\{2,3,4,5,6\}$. Dacă $y=2$, atunci $z=6$. Dacă $y=3$, atunci $z=3$. Dacă $y=4$, atunci nu avem soluții întregi. Dacă $y=5$, atunci nu avem soluții întregi. Dacă

$y = 6$, atunci $z = 2$. Observăm că orice permutare de soluții este soluție a ecuației inițiale. *Teorema este demonstrată.*

Teorema 2. Ecuația

$$\frac{10}{7} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

Demonstrație. Vom considera că $z \geq y \geq x$. Deoarece $\frac{1}{x} < \frac{10}{7}$, rezultă că $x \geq 1$. Analog, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$. Atunci $\frac{10}{7} \leq \frac{3}{x}$, de unde $x \leq 2$. Deci $x \in \{1,2\}$.

Avem următoarele cazuri:

1.Fie $x = 1$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{7}.$$

Din această ecuație rezultă

$$z = 2 + \frac{y+14}{3y-7}.$$

Observăm că pentru $3y - 7 > y + 14$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $y > 13$. Atunci $y \in \{3,4, \dots ,11\}$. Prin verificări se demonstrează că, numărul z nu este un număr natural. Deci ecuația nu are soluții naturale.

2. Fie $x = 2$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{14}.$$

Din această ecuație, rezultă că

$$z = 1 + \frac{y + 14}{13y - 14}$$

Observăm că pentru $13y - 14 > y + 14$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $y > 2$. Atunci $y \in \{2\}$. Prin verificări se demonstrează că, numărul z nu este un număr natural**.** Deci ecuația nu are soluții naturale. *Teorema este demonstrată.*

Teorema 3. Ecuația

$$\frac{10}{9} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

are soluțiile $(x, y, z) \in \{(1,10,90), (1,12,36), (1,18,18), (2,2,9)\}$.

Demonstrație. Vom considera că $z \geq y \geq x$. Deoarece $\frac{1}{x} < \frac{10}{9}$, rezultă ca $x \geq 1$. Analog, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$. Atunci $\frac{10}{9} < \frac{3}{x}$, de unde $x \leq 2$. Deci avem $x \in \{1,2\}$.

Astfel pentru x avem următoarele cazuri:

1. Fie $= 1$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{9}.$$

Din această ecuație rezultă

$z = 1 + \frac{81}{y-9}$.

Observăm că pentru $y \in \{10,12,18,36,100\}$, ecuația dată nu are soluții naturale. Dacă $y = 10$, atunci $z = 90$. Dacă $y = 12$, atunci $z = 36$. Dacă $y = 18$, atunci $z = 18$. Pentru celelalte valori ale lui y ecuația nu are soluții naturale.

2. Fie $x = 2$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{18}.$$

Din această ecuație rezultă

$$z = 1 + \frac{7y+18}{11y-18}.$$

Dacă $11y - 18 > 7y + 18$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $y > 9$. Atunci $y \in \{2,4, \dots ,9\}$. Dacă $y = 2$, atunci $z = 9$. Dacă $y = 9$, atunci $z = 2$. Observăm că orice permutare de soluții este soluție a ecuației inițiale. *Teorema este demonstrată.*

Teorema 4. Ecuația

$$\frac{10}{11} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.

Demonstrație. Vom considera că $z \geq y \geq x$. Deoarece $\frac{1}{x} < \frac{10}{11}$, rezultă că $x \geq 2$. Analog, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$. Atunci $\frac{10}{11} \leq \frac{3}{x}$ de unde $x \leq 3$. Deci avem $x \in \{2,3\}$.

Avem următoarele cazuri:

1. Fie $= 2$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{9}{22}.$$

Din această ecuație rezultă

$$z = 2 + \frac{4y+44}{9y-22}.$$

Observăm, că pentru $9y - 22 > 4y + 44$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $y > 13$. Atunci $y \in \{3,4, \dots ,13\}$. Prin verificări, numărul z nu este un număr natural. Deci ecuația nu are soluții naturale.

2. Fie $x = 3$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{19}{33}.$$

Din această ecuație rezultă

$$z = 1 + \frac{14y + 33}{19y - 33}$$

Observăm că pentru $19y - 33 > 14y + 33$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $y > 13$. Atunci $y \in \{2,4, \dots ,13\}$. Prin verificări, numărul z nu este un număr natural. Deci ecuația nu are soluții naturale. *Teorema este demonstrată.*

Teorema 5. Ecuația

$$\frac{10}{13} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

are soluția $(x,y,z) \in \{(2,52,4)\}$.

Demonstrație. Vom considera că $z \geq y \geq x$. Deoarece $\frac{1}{x} < \frac{10}{13}$, rezultă că $x \geq 2$. Analog, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$. Atunci $\frac{10}{13} < \frac{3}{x}$, de unde $x \leq 3$. Deci avem $x \in \{2,3\}$. Astfel pentru x avem urmatoarele cazuri:

1.Fie $x = 2$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{26}.$$

Din această ecuație, rezultă

$$z = 3 + \frac{5y+78}{7y-26}.$$

Observăm că pentru $7y - 26 > 5y + 78$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $y > 52$. Atunci $y \in \{4, \dots, 52\}$. Dacă $y = 4$, atunci $z = 52$. Dacă $y = 52$, atunci $z = 4$. Pentru celelalte valori ale lui y ecuația nu are soluții naturale.

2. Fie $x = 3$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{19}{33}.$$

Din această ecuație, rezultă

$$z = 1 + \frac{14y + 33}{19y - 33}$$

Observăm, că pentru $19y - 33 > 14y + 33$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $y > 13$. Atunci $y \in \{2,4, \dots, 13\}$. Pentru aceste valori ecuația nu are soluții naturale. Observăm, că orice permutare de soluții este soluție a ecuației inițiale. *Teorema este demonstrată.*

Teorema 6. Ecuația

$$\frac{10}{16} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

are soluțiile

$(x,y,z) \in \{(2,9,72), (2,10,40), (2,12,24), (2,16,16), (3,4,24), (3,6,8), (4,4,8)\}$

.

Demonstrație. Vom considera că $z \geq y \geq x$. Deoarece $\frac{1}{x} < \frac{10}{16}$, rezultă că $x \geq 2$. Analog, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{x}$. Atunci $\frac{10}{16} < \frac{3}{x}$, de unde $x \leq 4$.Deci avem $x \in \{2,3,4\}$. Astfel pentru x avem următoarele cazuri:

1.Fie $x = 2$. Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{8}.$$

Din această ecuație rezultă

$$z = 8 + \frac{64}{y-8}.$$

Observăm ca $y \in \{9,10,12,16,24,40,72\}$

Dacă $y = 9$, atunci $z = 72$. Dacă $y = 10$, atunci $z = 40$. Dacă $y = 12$, atunci $z = 24$. Dacă $y = 16$, atunci $z = 16$. Dacă $y = 24$, atunci $z = 12$. Dacă $y = 40$, atunci $z = 10$. Dacă $y = 72$, atunci $z = 9$.

2. Fie $x = 3$ Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{24}.$$

Din această ecuație rezultă

$$z = 3 + \frac{3y+72}{7y-24}.$$

Dacă $7y - 24 > 3y + 72$, ecuația dată nu are soluții naturale. Deci obținem $y > 24$. Atunci $y \in \{4,5, \dots .23,24\}$. Dacă $y = 4$, atunci $z = 24$. Dacă $y = 6$, atunci $z = 8$. Dacă $y = 8$, atunci $z = 6$. Dacă $y = 24$, atunci $z = 6$. Pentru celelalte valori ale lui y, ecuația nu are soluții naturale.

3. Fie $x = 4$ Substituim și obținem ecuația

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{8}.$$

Din această ecuație rezultă

$$z = 2 + \frac{2y+16}{3y-8}.$$

Dacă $3y - 8 > 2y + 16$, ecuația dată nu are soluție. Deci obținem $y > 24$. Atunci $y \in \{3,4, \dots .23,24\}$. Dacă $y = 3$, atunci $z = 24$. Dacă $y = 4$, atunci $z = 8$. Dacă $y = 8$, atunci $z = 4$. Dacă $y = 24$, atunci $z = 3$. Pentru celelalte valori ale lui y, ecuația nu are soluții naturale. Observăm, că orice permutare de soluții este soluție a ecuației inițiale. *Teorema este demonstrată.*

Concluzie. Teoremele 2, 4 prezentate mai sus demonstrează că conjectura formulată este falsă. Teoremele 1,3, 5, 6 demonstrează că pentru unele valori naturale n, ecuația $\frac{10}{n} = \quad = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ are soluții naturale, deci conjectură este adevărată.

BIBLIOGRAFIE

1. CIRA, O; SMARANDACHE F. *Solving Diophantine Equation*, Peer - Reviewers VLADULESCU S., TEODORESCU M., MUMTAZ, A. Bruxell: EuropaNova, 2014. 254 p. ISBN 978-1599-73-307-4.
2. SHANO, A.; LEYENDEKKERS J. Unit fractions and the Erdos- Strauss conjecture. *Journal of Advances in Mathematics*, 2016, 12(06), p.6295-6303. ISSN 2347-1921.
3. ȚARĂLUNGĂ, B; BORDAN V. Despre conjectura Sierpinski. *Probleme ale științelor socioumanistice și ale modernizării învățământului. Materialele conferinței științifice naționale cu participare internațională*. 2021, seria XXIII, Volumul III, p. 242-245. ISBN 978-9975 - 46-559-5.
4. ȚARĂLUNGĂ, B; BOSTAN M. Despre unele fracții alicote. *Probleme ale științelor socioumanistice și modernizării învățământului. Materialele conferinței științifice anuale a profesorilor și cercetătorilor UPS „Ion Creangă”.* 2018, seria XX, Volumul II, p. 224-229. ISBN 978-9975-46-376-8.