Rezolvare: În urma cercetării s-a stabilit amplasarea suprafeţei căldării conform fig.2, încât suprafaţa laterală este paralelogramul JFG_2E în care notăm înălţimea $FV=h$. Raza bazei $O_1G=r$. Evident că lungimea cercului bazei $L=2\pi r=JE$. Construcţia se realizează conform metodei algebrice [1]. Volumul căldării este $V=h\pi r^2$. Din asemănarea triunghiurilor ΔJFV, ΔO_1JG, ΔEGR rezultă că $h=\frac{1-2r}{2\pi(1-r)}$, iar volumul $V=\frac{1}{2}r^2(1-\frac{r}{1-r})$. Analog problemei 1 aflăm $r=\frac{7-\sqrt{17}}{8}$ pentru care obţinem volumul maxim $V_2(\approx 0{,}028)$.

Problema 3. Din pătrat se construeşte un vas în formă de con circular, încât suprafaţa laterală să fie dintr-o bucată. Aflaţi volumul maxim al vasului (fig.3).

Rezolvare: Volumul maxim se obţine pentru suprafaţa laterală reprezentată de o pătrime de cerc F_2KH cu centrul în H şi raza $KH=1$. Acest fapt se datorează dependenţei dintre raza bazei conului notată prin r şi înălţimea h, adică $h=\sqrt{1-r^2}$. Deoarece lungimea bazei conului este egală cu lungimea arcului F_2K rezultă că $2\pi r=0{,}5\pi$ de unde $r=0{,}25$. Volumul vasului $V=\frac{1}{3}h\pi r^2$ în care substituim rezultatele de mai sus obţinem $V_3=\frac{\sqrt{15}}{192}$ $(\approx 0{,}02)$.

Din problemele analizate rezultă că volumul cutiei este cel mai mare, după care urmează volumul căldării şi volumul vasului conic. Aceste probleme sânt utile şi aplicabile în industria ce se ocupă de producerea ambalajului.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Port, Geometrie Constructivă, Chişinău 2009.
2. S. Port, V. Trifan, Istoria Matematicii, Chişinău 2015.
3. Август Адлер, Теория геометрических построений, 1940.

DESPRE CONJECTURA SIERPINSKI

ON SIERPINSKI᾽S CONJECTURE

Boris Ţărălungă, dr.conf. univ.,
UPS „Ion Creangă”din Chişinău
Valentina Bordan, profesor, grad didactic superior,
Instituţia Publică Liceul Teoretic „Principesa Natalia Dadiani”
Boris Ţărălungă, Ph.D. univ., „Ion Creanga” SPU of Chisinau
ORCID iD: 0000-0002-2477-9376
Valentina Bordan, teacher, higher teaching degree,
Public Institution Theoretical High School "Princess Natalia Dadiani"

CZU 511

Abstract

In this paper is presented an alternative demonstration of the solution of the Diophantine equation $\frac{5}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Key-words. Sierpinski᾽s Conjecture, integers, natural numbers.

În teoria numerelor se studiază intens ecuaţiile diofantiene [1,4,5], ecuaţii ce admit doar soluţii întregi. În anul 1956 savantul polonez W. Sierpinski emite ipoteza: pentru orice număr natural $a \geq 2$, există numerele naturale x, y, z, astfel încât $\frac{5}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Această ipoteză este cunoscută în matematică ca conjectura lui Sierpinski [3]. În [2] se prezintă o soluţie a conjecturii Sierpinski.

În lucrarea dată se abordează conjectura lui Sierpinski şi se propune o soluţie alternativă a ei.

Teoremă. Ecuaţia $\frac{5}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ admite soluţia:

1) pentru $a=4r$,
$$x=r+1, y=r(r+1), z=4r, r\in N;$$
2) pentru $a=4r+2$,
$$x=r+1, y=(r+1)(2r+1), z=2(2r+1), r\in N;$$
3) pentru $a=4r+3$,
$$x=4r+3, y=r+1, z=(r+1)(4r+3), r\in N;$$
4) pentru $a=4r+1$,
$$x=m(4r+1), y=n, z=\frac{(4r+1)mn}{(5m-1)n-(4r+1)m}, m,n,r\in N;$$

Demonstraţie. Este cunoscut faptul, că orice număr natural $a, a\in N$ poate fi scris sub forma $a=4\,r$ sau $a=4r+1$ sau$a=4r+2$ sau $a=4r+3, r\in N$. Atunci:

1) pentru $a=4r$, avem
$$\frac{5}{4r}=\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r(r+1)}+\frac{1}{4r};$$
deci $x=r+1, y=r(r+1), z=4r, r\in N$ este soluţie.

2) pentru $a=4r+2$, avem
$$\frac{5}{4r+2}=\frac{1}{r+1}+\frac{1}{(r+1)(2r+1)}+\frac{1}{2(2r+1)}$$
deci $x=r+1, y=(r+1)(r+1), z=2(2r+1), r\in N$ este soluţie.

3) pentru $a=4r+3$, avem
$$\frac{5}{4r+3}=\frac{1}{4r+3}+\frac{1}{r+1}+\frac{1}{(r+1)(4r+3)}$$
deci $x=4r+3, y=r+1, z=(r+1)(4r+3), r\in N$ este soluţie.

4) pentru $a=4r+1$
$$\frac{5}{4r+1}=\frac{1}{m(4r+1)}+\frac{1}{n}+\frac{1}{\frac{(4r+1)mn}{(5m-1)n-(4r+1)m}},$$
deci $x=m(4r+1), y=n, z=\frac{(4r+1)mn}{(5m-1)n-(4r+1)m}, m,n,r\in N$ este soluţie.

Cazurile de mai jos confirmă această relaţie:

Pentru $a=9$, avem soluţia , $x=18, y=3, z=6$;

Pentru $a=53$, avem soluţia , $x=106, y=12, z=636$;

Pentru $a=897$, avem soluţia , $x=897, y=225, z=67275$;

Pentru $a=9457$, avem soluţia , $x=18914, y=2102, z=9939307$;

Pentru $a=13661$, avem soluţia , $x=13661, y=3420, z=2458980$. *Teorema este demonstrată.*

Corolarul 1. Fie $a=4r+1, r\in N$. Atunci avem soluţia:

1) dacă $4r+1\in\{5, 25, 45, \dots\}$, $x=4k+3$, $y=(4k+2)(4k+3), z=(4k+1)(4k++2), k\in$ N;

2) dacă $4r+1 \in \{13, 33, 53, ...\}, x = (20k+13)(4k+3), y = (20k+13)(4k+3), z = 4k++3, k \in$ N;
3) dacă $4r+1 \in \{17, 37, 57, ...\}, x = (20k+17)(4k+4), y = (20k+17)(2k+2), z = 4k++4, k \in N$;
4) dacă $4r+1 \in \{9, 29, 49, ...\}, x = (20k+9)(4k+2),\ y = (4k+2)(4k+3),\quad z = 4k++3, k \in N$;
5) dacă $4r + 1 \in \{21, 81, 121, ...\},\ x = 60k + 21, y = 60k + 21,\ z = 20k + 7, k \in N$;
6) dacă $4r + 1 \in \{41, 101, 161, ...\}, x = (60k+41)(12k+9), y = (60k+41)(4k+3),\ z = 12k+9, k \in N$.

Demonstrație. Avem că $4r+1 \in \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, ...\}$. Fie ultima cifră a numărului este 5, $4t+1 \in \{5, 25, 45, ...\}$, deci $4r+1 = 5k, k \in N$. Atunci

$$\frac{5}{4r+1} = \frac{5}{20k+5} = \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{(4k+2)(4k+3)} + \frac{1}{(4k+1)(4k+2)}$$

Fie ultima cifră a numărului este 3,$4r+1 \in \{13, 33, 53, ...\}$, deci $4r+1 = 20k+13,\ k \in N$. Rezultă, că $4r+3 = 20k+15, k \in N$. Atunci

$$\frac{5}{4r+1} = \frac{5}{20k+13} = \frac{1}{(20k+13)(4k+3)} + \frac{1}{(20k+13)(4k+3)} + \frac{1}{4k+3}.$$

Fie ultima cifră a numărului $4r + 1$ este 7, $4r + 1 \in \{17, 37, 57, ...\}$, deci $4r+1 = 20k + +17, k \in N$. Rezultă, că $4r+4 = 20k+20, k \in N$. Atunci

$$\frac{5}{4r+1} = \frac{5}{20k+17} = \frac{1}{(20k+17)(4k+4)} + \frac{1}{(20k+17)(2k+2)} + \frac{1}{4k+4}.$$

Fie ultima cifră a numărului este 9, $4r+1 \in \{9, 29, 49, ...\}$,deci $4r+1 = 20k+9$. Rezultă, că $4r+2 = 20k+10, k \in N$. Atunci

$$\frac{5}{4r+1} = \frac{5}{20k+9} = \frac{1}{(20k+9)(4k+2)} + \frac{1}{(4k+2)(4k+3)} + \frac{1}{4k+3}.$$

Fie $4r+1 \in \{21, 81, 121, ...\}$, deci $4r+1 = 60k+21, k \in N$. Atunci

$$\frac{5}{4r+1} = \frac{5}{60k+21} = \frac{1}{60k+21} + \frac{1}{60k+21} + \frac{1}{20k+7}.$$

Fie $4r+1 \in \{41, 101, 161, ...\}$, deci $4r+1 = 60k+41, k \in N$. Atunci

$$\frac{5}{4r+1} = \frac{5}{60k+41} = \frac{1}{(60k+41)(12k+9)} + \frac{1}{(60k+41)(4k+3)} + \frac{1}{12k+9}.$$

Corolarul este demonstrat.

Corolarul 2. Pentru fracţiile $\frac{5}{a}$, $a \in N$, avem soluţia:

1) dacă $a = 180q + 61$, atunci $x = 2(180q+61),\ y = 40q + 14, z = (180q + 61)(20q++7), q \in N$;
2) dacă $a = 180q + 121$, atunci $x = 2(180q+121),\ y = 40q+27, z = (180q + +121)(40q+27), q \in N$;
3) dacă $a = 420q + 181$, atunci $x = 3(420q+361),\ y = 90q + 78, z = (420q + +361)(30q+26), q \in N$;
4) dacă $a = 420q + 361$, atunci $x = 3(420q+361),\ y = 90q + 78, z = (420q + +361)(30q+26), q \in N$;

5) dacă $a = 2340q + 1261$, atunci $x = 2(2340q + 1261)$, $y = 520q + 286$, $z = (520q + 286)(2340q + 1261), q \in N$;
6) dacă $a = 3060x + 901$, atunci $x = 2(3060q + 901)$, $y = 680q + 204$, $z == (3060q + 901), q \in N$.

Corolarul 3. Pentru fracţiile $\frac{5}{a}, a \in N$, avem soluţiile:

1) dacă $a = 61$, atunci $x = 2989, y = 14, z = 98$;
2) dacă $a = 961$, atunci $x = 961$, $y = = 248, z = 7688$;
3) dacă $a = 1021$, atunci $x = 2042$, $y = 227$, $z = 463534$;
4) dacă $a = 9961$, atunci $x = 9961, y = 24, z = 3546116$;
5) dacă $a = 10021$, atunci $x = 10021, y = 2508, z = 2284788$;
6) dacă $a = 99961$,atunci $x = 199922, y = 22214, z = 1110266827$.

BIBLIOGRAFIE

1. Guy R. K. ” Egyptian Fractions”. Unsolved Problems in Number Theory. 3rd Edition Springer Verlag, Berlin, New York (2004),437 pp.
2. Palama G. Su di un a congettura relativa alla possibilita in numeri naturali della $\frac{5}{n} = \frac{1}{x_1} + + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$. Bolletino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.13 (1958), n.1, pp. 65-72.
3. 3. Sierpinski W. Sur les decompositions de nombres rationnels en fractions primaries, “Matehesis” . LXV,1956, pp.16-32.
4. Ţarălungă B., Bostan M. About a Diophantine equation, Mater. Conf. ”International Conference on mathematics and information technology”, Bălţi, Rep. Moldova, 2018, p. 95
5. Yamamoto K. On the diofantine equation $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Memoirs of the Faculty of Science, 1965.

APLICAŢII ALE SERIILOR DE VARIABILĂ COMPLEXĂ
APPLICATIONS OF THE COMPLEX VARIABLE SERIES

Zinaida Ghilan, *dr., conf. univ.,*
UPS „Ion Creangă”din Chişinău
Zinaida Ghilan, PhD associate professor,
„Ion Creanga” SPU of Chisinau
ORCID iD: 0000-0002-7216-5096
Victor Pricop, *dr., conf. univ.,*
UPS „Ion Creangă”din Chişinău
Victor Pricop, PhD associate professor,
„Ion Creanga” SPU of Chisinau
ORCID iD: 0000-0001-9321-6107

CZU 51

Abstract

This paper talks about complex variable series because these series can be used to solve various problems with practical applications. We will present some examples of convergence of the complex variable series, including some solutions with the Maple package.

Key-words: complex series, convergence