ASPECTE METODICE PRIVIND CALCULUL INTEGRALELOR IMPROPRII CU PACHETE MATEMATICE

Pricop Victor, *dr., conf. univ.*
Ghilan Zinaida, *dr., conf. univ.*
UPS „Ion Creangă” din Chișinău

CZU: 517.382

Abstract

This paper talks about applications of the Maple and Wolfram Mathematica program on computing of an improper integrals. These software can be used as computing and training environments. In this paper we will present some examples of calculus of an improper integrals with mathematic methods and using mathematical software.

Key-words: improper integrals, convergence, Riemann sums.

În aceasta lucrare vom încerca să facem o generalizare a noțiunii de integrală a funcțiilor definite pe intervale nemărginite. Pentru a defini aceste tipuri de integrale nu este suficient să aplicăm o trecere la limită într-o sumă integrală Riemann, ci este necesar să folosim o trecere la limită suplimentară, care să implice domeniul de integrare. Pentru aceasta, domeniul inițial de integrare, unde definiția integrabilității Riemann nu se poate aplica, se înlocuiește cu un subdomeniu pe care funcția să fie integrabilă Riemann. Apoi, acest subdomeniu se extinde până coincide cu domeniul inițial de integrare. Limita integralei luată pe subdomeniu, când acest subdomeniu tinde să devină mulțimea inițială de definiție a funcției, se numește integrală improprie.

În cele ce urmează vom extinde noțiunea de integrală Riemann pentru a acoperi aceste cazuri (interval de integrare nemărginit, respectiv integrând nemărginit pe intervalul de integrare), obținându-se așa-numitele *integrale improprii* sau *integrale generalizate* [1].

Prin analogie cu seriile numerice, pentru care convergența sau divergența seriei erau definite cu ajutorul limitei șirului sumelor parțiale, vom defini convergența sau divergența unor integrale improprii cu ajutorul unui procedeu de trecere la limită pentru integrale „parțiale”, pe domenii mai mici, pe care se evită situațiile problematice în cauză. Vom începe mai întâi cu situația în care intervalul de integrare este nemărginit, continuând apoi cu situația în care integrantul este nemărginit pe intervalul de integrare.

Pentru definirea integralei definite integrabilității Riemann s-a presupus că: funcţia de integrat este definită pe interval închis $[a, b]$ și că funcția f: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită pe $[a, b]$, plecând de la diviziuni ale acestui interval şi construind sume integrale ale căror au limită. Integrabilitatea funcţiei se stabilea cu ajutorul sumelor (de tip Darboux sau de tip Riemann), urmând o serie de teoreme care identifică clase largi de funcţii integrabile, de exemplu, funcţiile continue sau cele monotone. Pană acum am considerat numai integrale pentru care : a) domeniul de integrare era $[a, b]$: b) un interval de lungime finită; c) funcția mărginită pe $[a, b]$. Aceste integrale se mai numesc integrale proprii [2].

Dacă renunțăm la cele două condiții și impunem ca: a) funcția este definită pe interval nemărginit și b) funcția este nemărginită pe $[a, b]$. Această proprietate a fost admisă pentru introducerea integralelor improprii pe intervale nemărginite.

Să presupunem, o funcție $f(x)$ definită pe intervalul $[a, \infty)$. Să încercăm să divizăm acest interval într-un număr finit de diviziuni, una dintre aceste diviziuni va fi nemărginită, și, deci, în acest caz nu vom putea vorbi de suma integrală. Pentru a conștientiza aceasta, vom studia *integrale pe intervale nemărginite. Aceste integrale poartă denumirea de integrale improprii* [3, 4].

Definiție. *Fie* $f(x)$: $[a, +\infty) \to \mathbb{R}$, *o funcție mărginită și integrabilă pe orice interval de forma* $[a, b]$, *b>a. Dacă există în R această limită*

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

atunci această limită reprezintă integrală improprie a funcției f pe tervalul nemărginit $[a, \infty)$. *Se notează:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx .$$

Prin definiție

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx . \quad (1)$$

Dacă această limită există și este finită $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$, atunci integrala improprie $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ există sau că ea este convergentă. Funcția f se numește integrabilă, iar valoarea integralei improprii este prin definiție egală cu valoarea acestei limite sau că ea este convergentă. În caz contrar, când limita nu există sau există, dar nu este finită, integrala improprie $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ se numește divergentă.

În mod analog se definește integrala improprie pe intervalul nemărginit spre $-\infty$. Dacă funcţia este mărginită şi integrabilă pe orice interval de forma $(-\infty, b]$ şi există limita de mai jos, atunci

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (2)$$

Integralele improprii se pot defini pe toată axa reală, dar o astfel de integrală se scrie ca suma de două integrale, de forma (1) și (2), iar existenţa integralei din funcţia f pe întreg intervalul $(-\infty. \infty)$ este condiţionată de existenţa ambelor integrale din descompunerea menţionată. Aşadar, o astfel de integrală pe interval nemărginit în ambele sensuri se poate scrie ca:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

Pentru definiția integralei $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ este important să se observe faptul că

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

conține două variabile a și b, întrucât ne putem apropia de $-\infty$ și $+\infty$ în mod independent. Acest lucru îl putem observa și în cazul dacă pentru orice $c \in (-\infty, +\infty)$ există ambele integrale $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ și $\int_c^{+\infty} f(x)dx$, atunci putem defini integrala improprie cu ambele limite infinite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \quad (3)$$

unde c este un număr real oarecare. Acest c poate fi, de exemplu, originea cu abscisa 0 sau un alt punct în care, posibil, funcţia de integrat îşi schimbă expresia analitică. Putem menționa că convergența primei integrale este independentă de convergența celei de a doua.

Sensul geometric al integralelor improprii este determinat de calculul ariilor unor mulțimi din plan mărginite de graficul unei funcții $f(x) \geq 0$, asimptote orizontale, asimptote verticale, drepte paralele cu axele *OY* și *OX*. Acest nou concept de integrală se va numi integrală improprie sau integrală generalizată.

În cazul în care intervalul $[a, b]$ admite un punct de acumulare în vecinătatea căruia funcţia este nemărginită, se poate defini o integrală generalizată printr-o trecere la limită, analog cu care s-au definit integralele improprii de speța I.

Integralele improprii au o serie de proprietăţi comune cu ale integralei definite sau care provin din acestea. De exemplu, se poate aplica metoda directă de integrare, metoda schimbării de variabilă, formula integrării prin părţi etc. De asemenea o integrală improprie (pe interval nemărginit) de oricare dintre formele anterior prezentate poate fi calculată efectiv folosind definiţiile respective, adică prin trecere la limită.

O integrală improprie (pe interval nemărginit) de oricare dintre formele (1) și (2), pot fi utilizate în calcul, folosind definiţiile respective, prin trecere la limită. Dacă este o primitivă a funcţiei de integrat $F(x)$, deci cele două formule menţionate pot fi scrise ca:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}(F(x))|_a^b = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a). \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}(F(x))|_a^b = \lim_{a\to-\infty} F(b) - F(a) = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a). \quad (5)$$

Aceste formule pot fi considerate *ca adaptări ale formulei Newton-Leibniz la cazul intervalelor infinite.*

Înainte de a se calcula valoarea unei integrale improprii (pe interval nemărginit) se poate pune problema existenței acesteia. Această problemă este una de convergenţă, oarecum similară cu cele întâlnite, de exemplu, la seriile numerice. Aşadar, se poate pune problema stabilirii naturii unei integrale improprii (adică a convergenţei/divergenţei sau inexistenţei acesteia), înainte de a aborda determinarea valorii ei.

Mai mult decât atât, este posibil ca să se poată stabili convergența unei integrale, dar găsirea valorii ei să ridice probleme majore, de exemplu, în cazul în care primitiva implicată în formulele (4)/(5) nu este exprimabilă analitic prin funcţii elementare. Au fost descoperite şi formulate o serie de criterii de convergenţă pentru integrale improprii de diverse tipuri.

Integrale improprii dependente de parametri

Dependența de parametru poate apare și în contextul integralelor improprii. Vom prezenta în continuare două dintre cele mai cunoscute integrale de acest tip [5, 6].

a) *Funcția Γ(Gamma) a lui Euler*

Integrala $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$, este convergentă pentru orice $\alpha>0$, definind astfel o funcție $\Gamma: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, integrala de mai sus se numește integrala lui Euler de speța a II sau Gamma funcție *a lui Euler*.

Funcția Gamma este pozitivă, convexă, infinit derivabilă și are următoarele proprietăți:

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, pentru orice $p > 0$ (formula de recurență).

3. $\Gamma(\alpha+n) = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots\alpha\Gamma(\alpha)$, pentru orice $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$.

4. $\Gamma(n+1) = n!$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5. $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$, pentru orice $\alpha \in (0,1)$ (formula complementelor).

6. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Datorită proprietății 4 se consideră că funcția Gamma generalizează noțiunea de factorial pe numere reale pozitive. Aceasta este o componentă a mai multor distribuții de probabilitate, deci are o aplicare vastă în statistică și combinatorică.

Exemplu. Să se calculeze integrala $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x} dx$.

Rezolvare. Fie integral $\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{\frac{3}{2}-1} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$.

Prin utilizarea formulei de recurență, urmează că:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Rezolvăm această integrală în Maple utilizând paleta *Expression* (fig. 1).

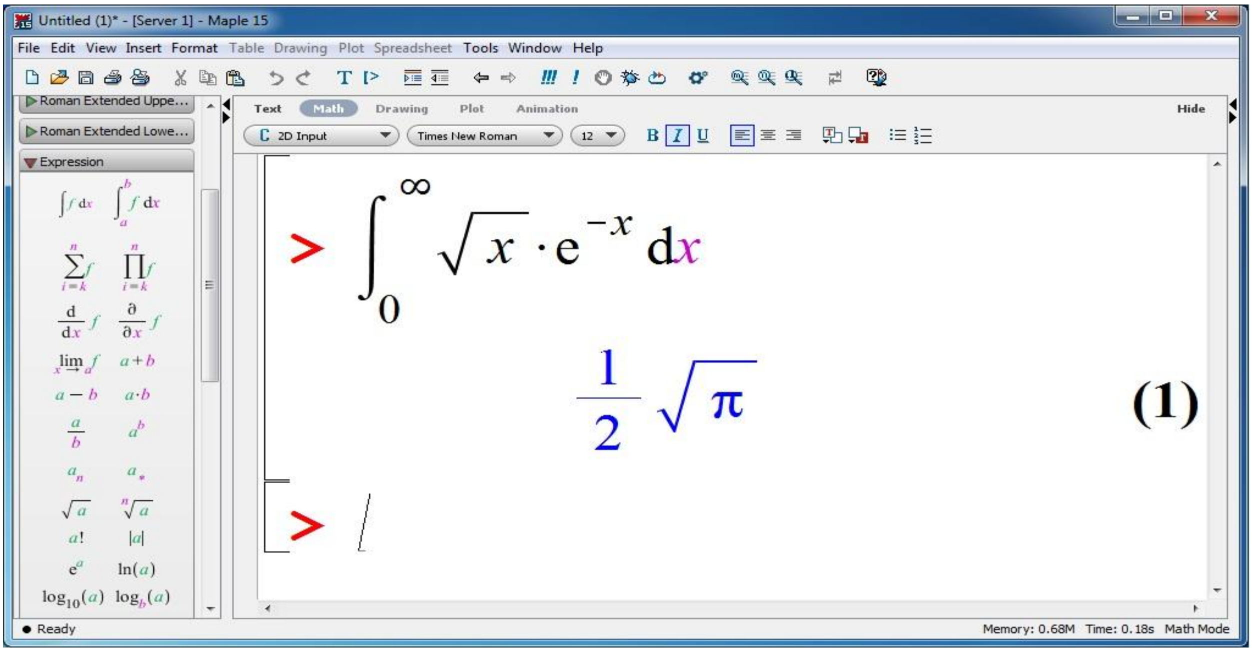

Figura 1. Rezolvarea directă a integralei improprii în Maple

b) *Funcția B a lui Euler*. Fie α și β sunt două numere reale pozitive și poartă numele integrala lui Euler de speța I, este convergentă pentru orice α>0 și β>0

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx,$$

este convergentă pentru orice $\alpha, \beta > 0$, definind astfel o funcție $B: (0,\infty) \text{ x } (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Vom descrie următoarele proprietăți ale funcției B.

1. $B(1,1) = 1$.

2. $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$, pentru orice $\alpha, \beta > 0$.

3. $B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{(1+u)^{\alpha+\beta}} du$, pentru orice $\alpha, \beta > 0$.

4. $B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1} B(\alpha-1,\beta)$, pentru orice $\alpha, \beta > 0$ (formula de recurență pentru prima poziție).

5. $B(\alpha,\beta) = \frac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta-1)$, pentru orice $\alpha, \beta > 0$ (formula de recurență pentru a doua poziție).

6. $B(\alpha,\beta) = \frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

7. $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, pentru orice $\alpha, \beta > 0$.

8. $B(\alpha,1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}$, pentru orice $\alpha \in (0,1)$ (formula complementelor).

9. $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$.

Exemplu. Să se calculeze integrala $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+5x-6}}dx$.

Rezolvare. Fie integrala $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+5x-6}}dx = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}dx$.

Pentru a calcula aceasta integrală cu ajutorul proprietăților funcției B, transformăm intervalul de integrare [2,3] în intervalul [0,1] cu ajutorul schimbării de variabilă x-2=t. Obținem când x=2, t=0, și x=3, t=1. Atunci

$$\int_2^3 \frac{1}{(x-2)(3-x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}dt = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt =$$

$= B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$. De unde $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+5x-6}}dx = \pi$.

Rezolvăm această integrală prin modalitatea interactivă *Tools/Tutors/Calculus Single-Variables/Integration Methods* (fig. 2). În casetele de dialog completăm informația necesară, funcția de sub integrală, limitele de integrale. Tastăm butonul *Start*, ne convingem că informația este introdusă corect, apoi tastăm butonul *All Steps* pentru toate iterațiile de calcul (fig. 3), după tastarea butonului *Close* rezultatul va fi în foaia de calcul.

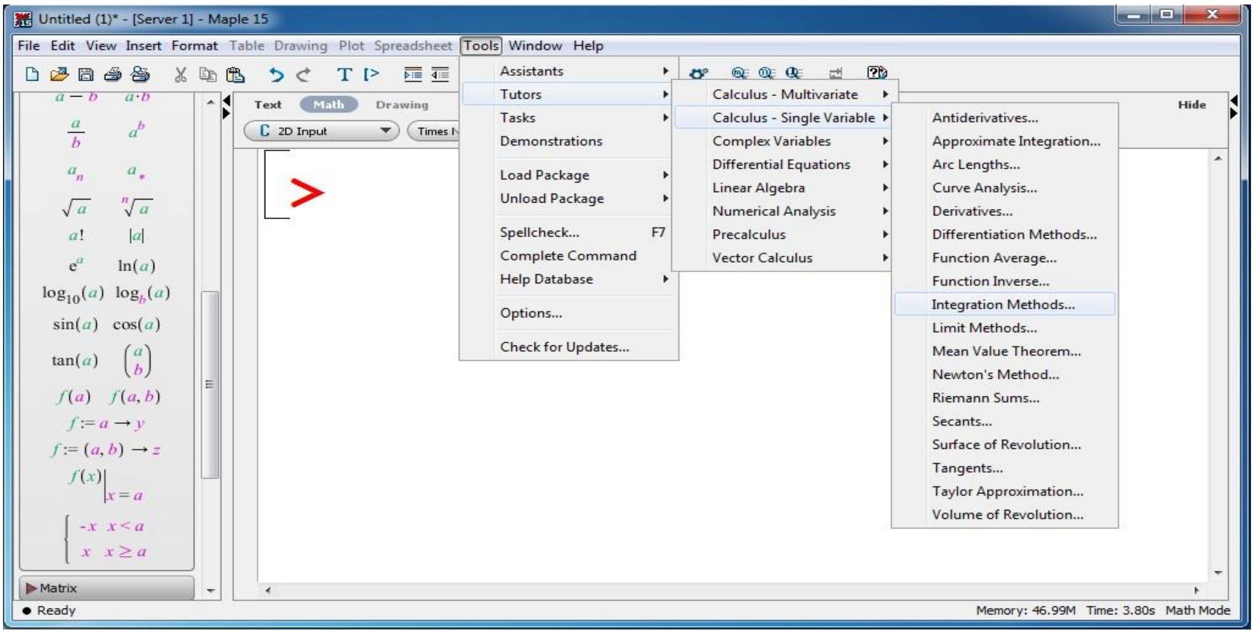

Figura 2. Lansarea modalității interactive de rezolvare a integralelor în Maple

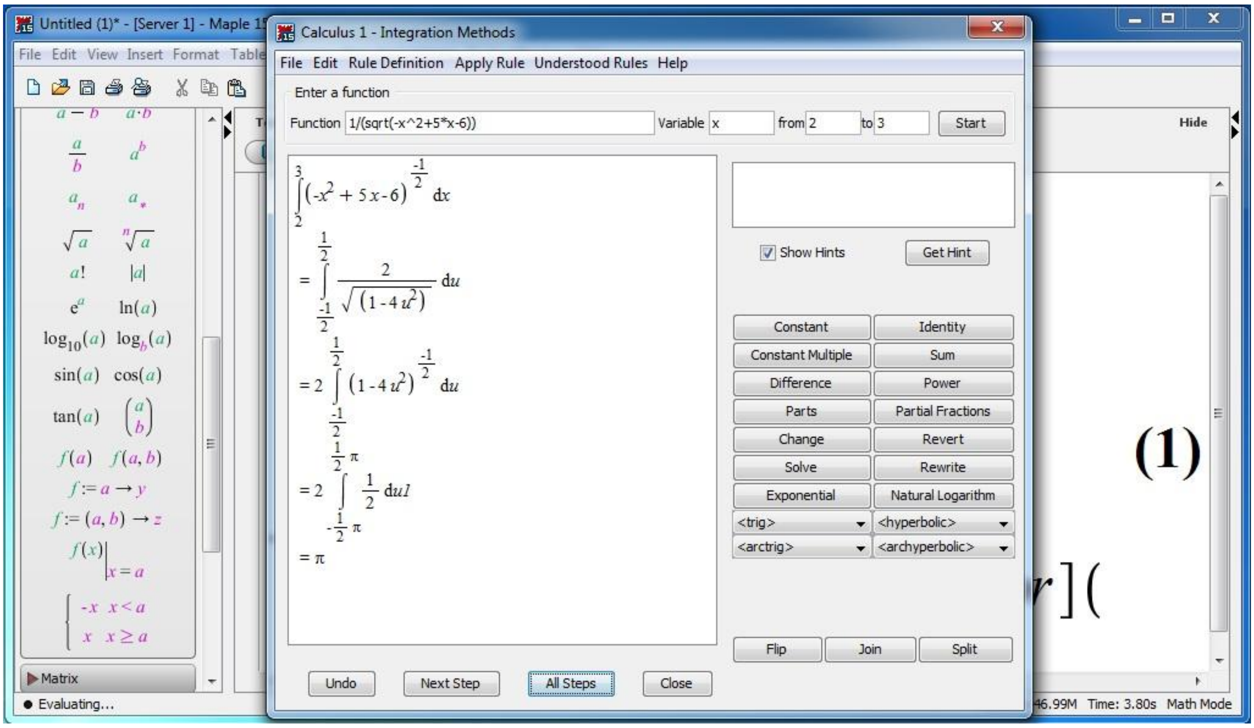

Figura 3. Rezolvarea integralei în Maple

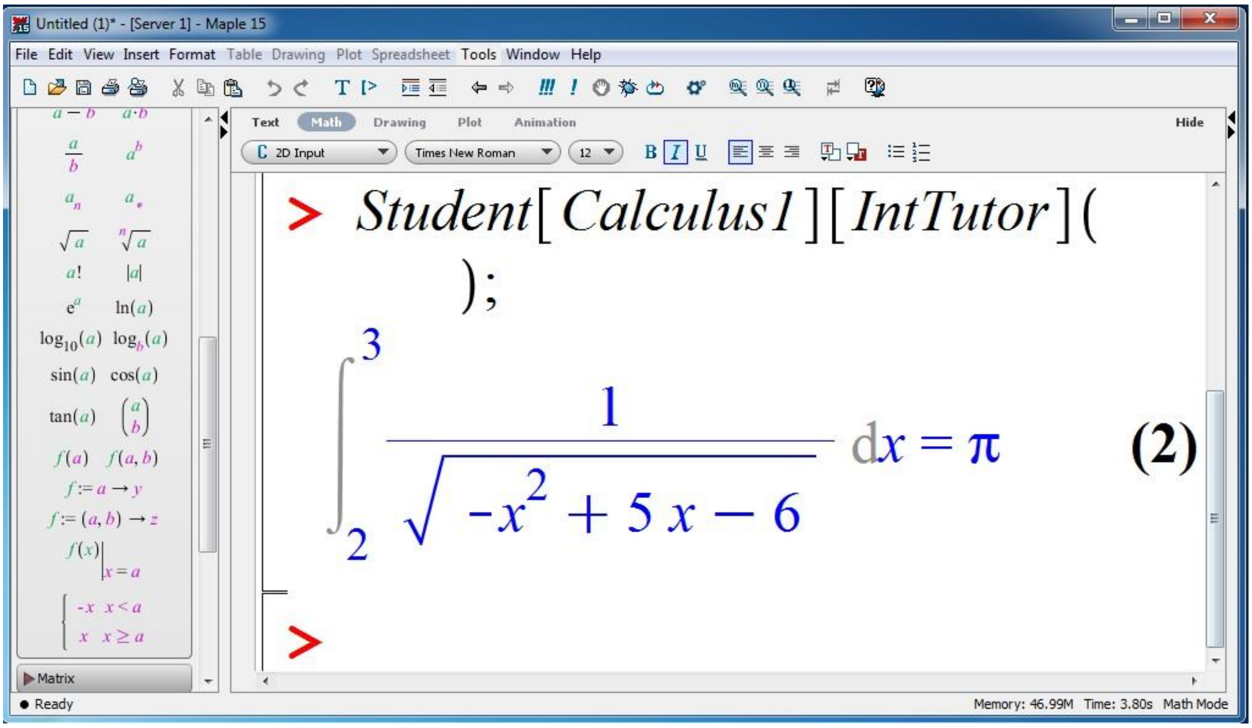

Figura 4. Rezultatul final în Maple

Exemplu. Să se calculeze integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\, cos^2x\, dx$.

Rezolvare [7]. Luând în considerație identitatea trigonometrică fundamentală $sin^2x + cos^2x = 1$, de unde $cos^2x = 1 - sin^2x$. Utilizând schimbarea de variabilă $sin^2x = t$ și derivând după variabila t, obținem $dt = 2sinx\, cosx\, dx$, de unde

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\, cos^2x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3x \cos x \cdot 2\cos x\, sinx \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}\, dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Folosind formula de recurență pentru prima poziție, obținem:

$$\frac{1}{2\beta}B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\frac{5}{2}-1}{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}-1}B\left(\frac{5}{2}-1,\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}}{3}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Folosind formula de reprezentare a funcției β cu ajutorul funcției Γ, obținem că

$$\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\Gamma(3)}=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2!}=\frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Conform formulei de recurență avem:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

De unde $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4x\, cos^2x\, dx=\frac{\pi}{32}$.

Rezolvarea integralei în Wolfram Mathematica (fig. 5).

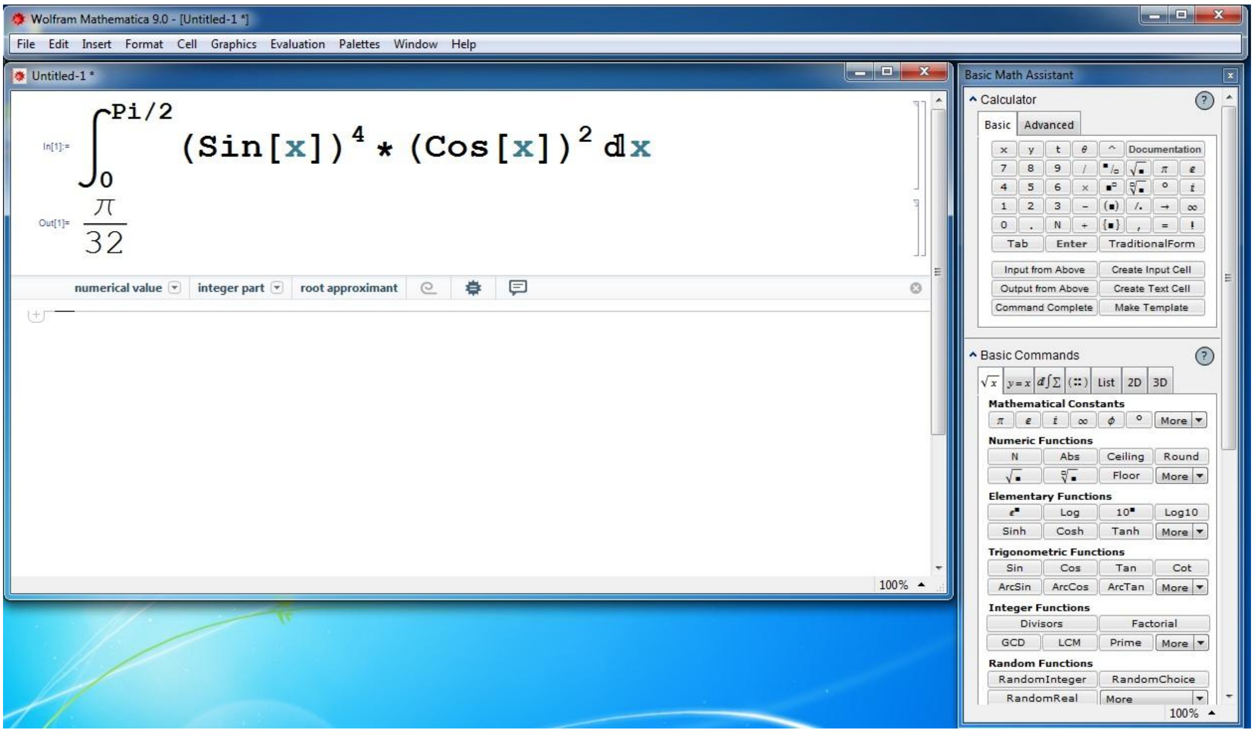

Figura 5. Rezultatul final în Wolfram Mathematica

Funcțiile Beta și Gamma sunt considerate funcții speciale fundamentale, care permit calcularea sau exprimarea prin valorile acestora a multor integrale, inclusiv celor care nu se exprimă prin funcții elementare.

Exemplu. Să se studieze natura integralei $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$.

Rezolvare. Observăm că se integrează funcția $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$, care este continuă pe orice interval $[0,b]$, cu $\forall b>0$, . Deci este integrabilă pe orice interval. Atunci, prin definiție, avem:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx,\text{ unde } \int e^{-x}dx=-e^{-x}.$$

Deci

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx=\lim_{b\to\infty}(-e^{-x})|_0^b=\lim_{b\to\infty}(1-e^{-b})=1.$$

Ceea ce înseamnă că integrala improprie este convergentă. Rezolvarea în Maple (fig. 6).

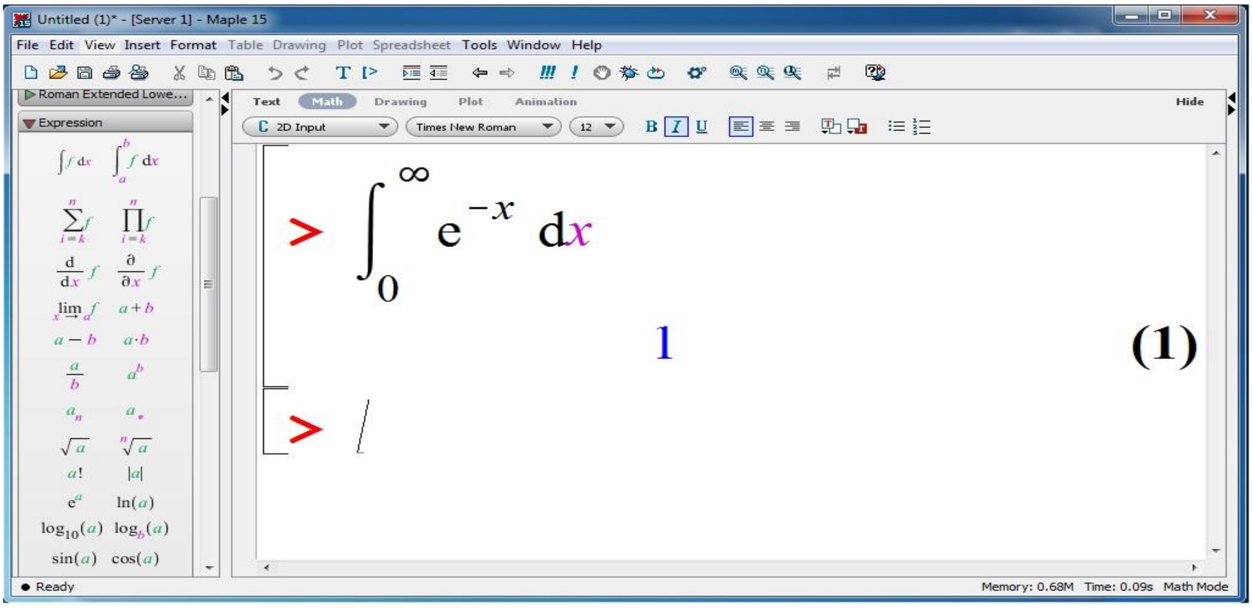

Figura 6. Rezolvarea integralei improprii în Maple

Exemplu. Să se studieze natura integralei $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4}$.

Rezolvare [7].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \int_{a}^{b} \frac{dx}{x^2-4} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \left(\frac{1}{2} arctg \frac{x}{2}\right)\Big|_a^b = \frac{1}{2} \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \left(arctg \frac{x}{2}\right)\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} \left(arctg \frac{b}{2} - arctg \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(arctg(\infty) - arctg(-\infty)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Deci integrala este convergentă.

Exemplu. Să se studieze natura integralei $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Rezolvare.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{1}{a} + 1\right) = 1.$$

Deci integrala este convergentă. Rezolvarea în Wolfram Mathematica cu comanda *Integrate* (fig. 7).

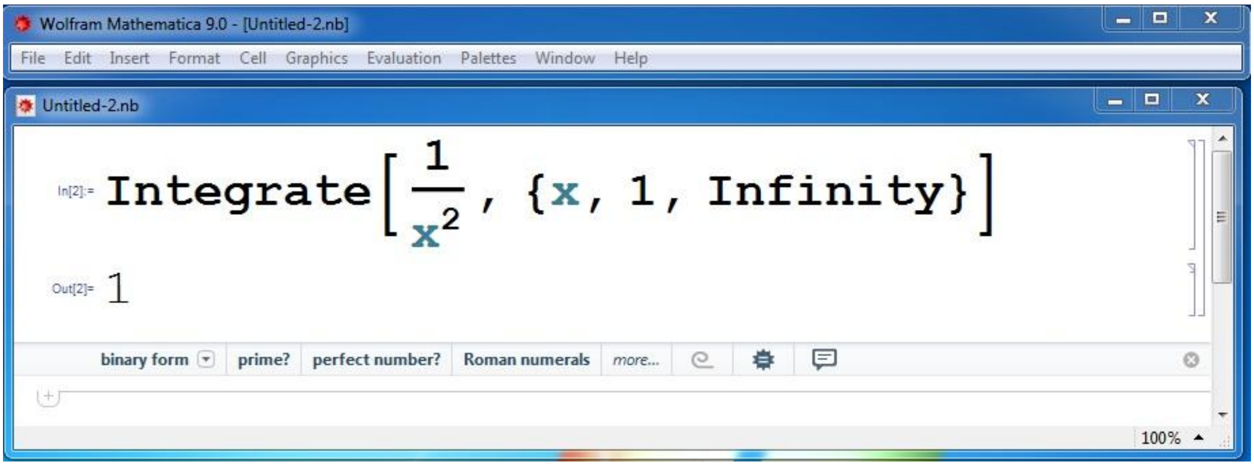

Figura 7. Rezolvarea integralei improprii în Wolfram Mathematica

Exemplu. Să se studieze natura integralei $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Rezolvare.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b\frac{dx}{(x+2)^2+5}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)\Big|_a^b=$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(arctg\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\Big|_a^b=\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(arctg\frac{b}{\sqrt{5}}-arctg\frac{a}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}(arctg(\infty)-$$

$$arctg(-\infty))=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Deci integrala este convergentă. Rezolvarea în Maple (fig. 8).

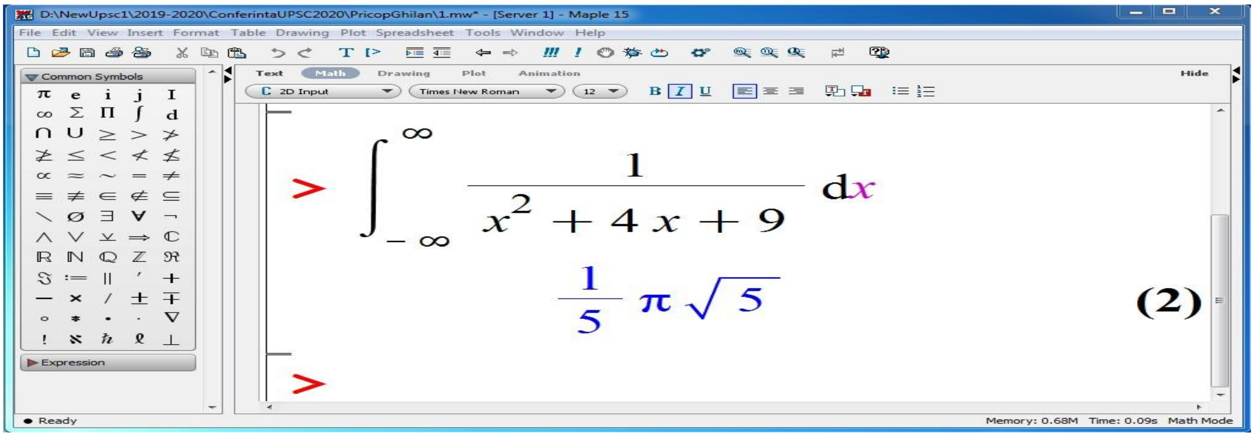

Figura 8. Rezolvarea integralei improprii în Maple

Exemplu. Să se studieze natura integralei $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Rezolvare.

Conform formulei (3) ce presupune că c=0, obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Calculăm integrala: $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}arctg|_a^0=\lim_{a\to-\infty}(argtg0-$ $-arctga)=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$

Analogic se calculează și integrala $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}arctg|_0^b=\lim_{b\to\infty}(argtgb-$ $-arctg0)=\frac{\pi}{2}.$

Am obținut că integrala improprie $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ și este convergentă. Calculul în Wolfram Mathematica (fig. 9).

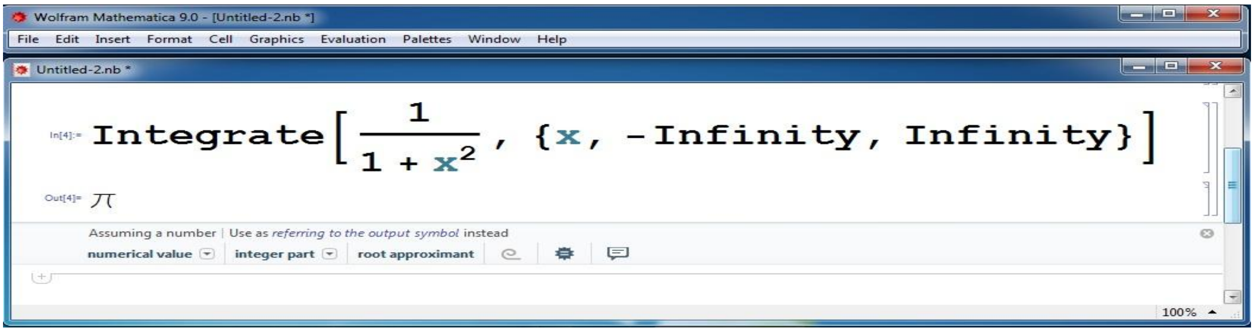

Figura 9. Calculul integralei improprii în Wolfram Mathematica

Exemplu. Să se studieze natura integralei $\int_0^{\infty}(1+2x)e^{-x}dx$.

Rezolvare.

$$\int_0^\infty (1+2x)e^{-x}dx = \left| \begin{matrix} \text{notăm:} \\ 1+2x=u;\, du=2dx; \\ dv=e^{-x};\, v=-e^{-x} \end{matrix} \right| = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1+2x)e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-(1+2x)e^{-x}\right)\Big|_0^b + \lim_{b\to\infty}\int_0^b 2e^{-x}dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-(1+2x)e^{-x}\right)\Big|_0^b - 2e^{-x}\Big|_0^b\Big) = \lim_{b\to\infty}\left(-(3+2x)e^{-x}\right)\Big|_0^b = 3.$$

Deci integrala este convergentă. Rezolvarea în Maple (fig. 10).

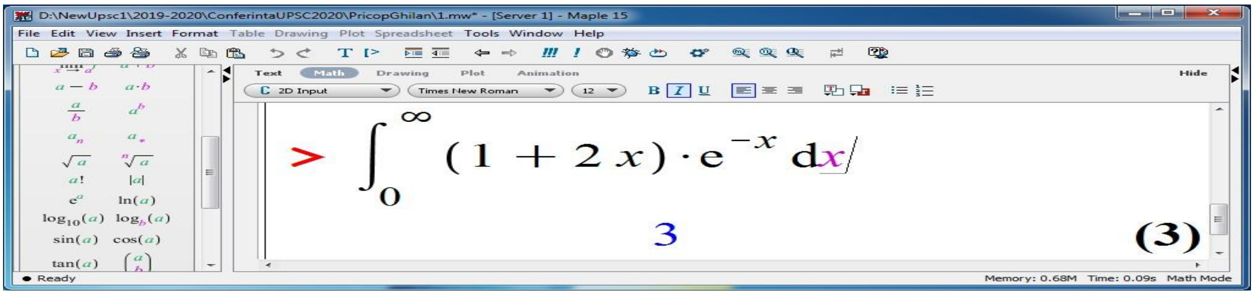

Figura 10. Rezolvarea integralei improprii în Maple

Exemplu. Să se studieze natura integralei $\int_1^\infty \frac{arctgx}{x^2}dx$.

Rezolvare.

$$\int_1^\infty \frac{arctgx}{x^2}dx = \left| \begin{matrix} \text{notăm:} \\ arctgx = u;\, du = \dfrac{dx}{x^{2+1}}; \\ dv = \dfrac{dx}{x^2};\, v = -\dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{arctgx}{x}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{dx}{x(x^2+1)} = \lim_{b\to\infty} -\left(\frac{arctgx}{x}\right)\Big|_1^\infty =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \lim_{b\to\infty}\int_1^\infty \frac{dx}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \lim_{b\to\infty}\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi}{4} + \lim_{b\to\infty}\left(lnx - \frac{1}{2}ln(x^2+1)\right)\Big|_1^b =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \lim_{b\to\infty} ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_1^b = \frac{\pi}{4} + ln\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}\Big|_1^b = \frac{\pi}{4} + ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deci integrala este convergentă. Rezolvarea în Wolfram Mathematica (fig. 10).

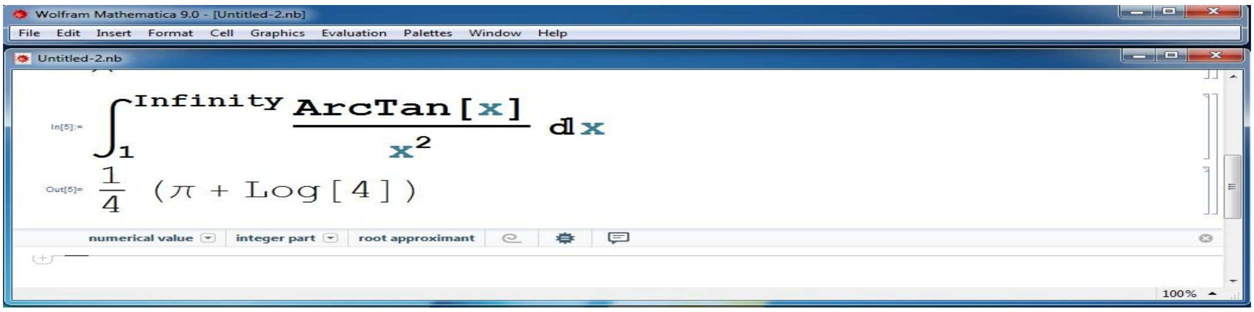

Figura 11. Calculul integralei improprii în Wolfram Mathematica

Exemplu. Să se studieze natura integralei $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$.

Rezolvare.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x^2+4}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\right)\Big|_a^b=\frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(arctg\frac{x}{2}\right)\Big|_a^b=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(arctg\frac{b}{2}-arctg\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}(arctg(\infty)-arctg(-\infty))=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Deci integrala este convergentă. Rezolvarea în Maple (fig. 12).

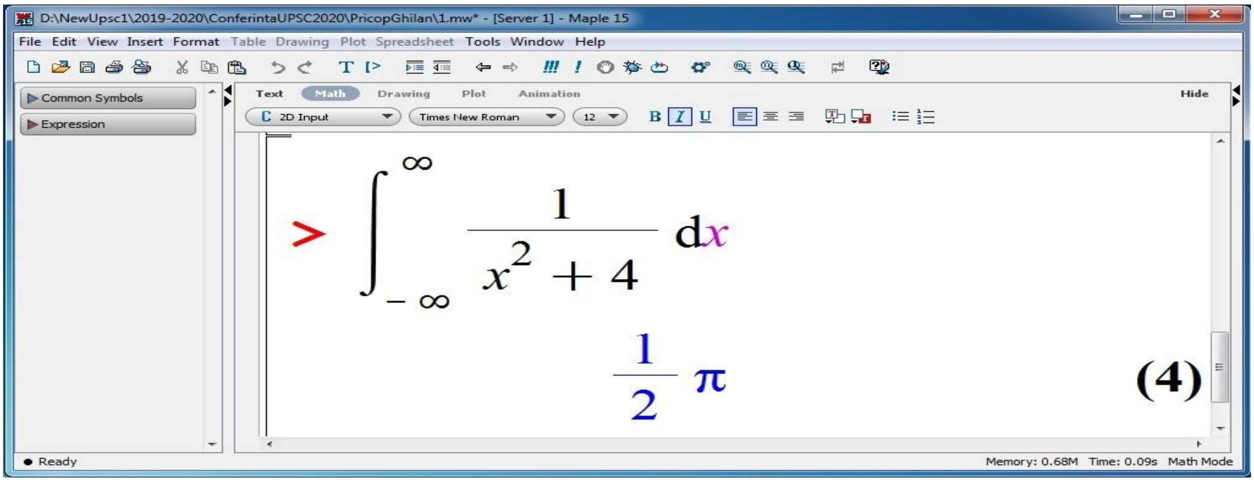

Figura 12. Rezolvarea integralei improprii în Maple

Exemplu. Să se studieze natura integralei $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$.

Rezolvare.

Observăm că se integrează funcția $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, care este continuă pe orice integval de tipul $[0,b)$, cu orice b>0, deci este integrabilă pe orice interval $[0,b)\subset(0,+\infty)$. Atunci prin definiție obținem $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$. Presupunem *x=tgt*, atunci $dx=\frac{dt}{cos^2t}$. Înlocuim $\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{(1+tg^2t)^2}=\frac{cos^4t}{cos^2t+sin^2t}=cos^4t$. Observăm, că la variația lui *x* de la 0 până la infinit, *t* se schimbă de la 0 la $\frac{\pi}{2}$. Astfel $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}cos^2t\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+cos2t}{2}dt=\frac{\pi}{4}$ ceea ce înseamnă că integrala improprie de speța întâia $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ este convergentă și $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{4}$. Calculul în Wolfram Mathematica (fig. 13).

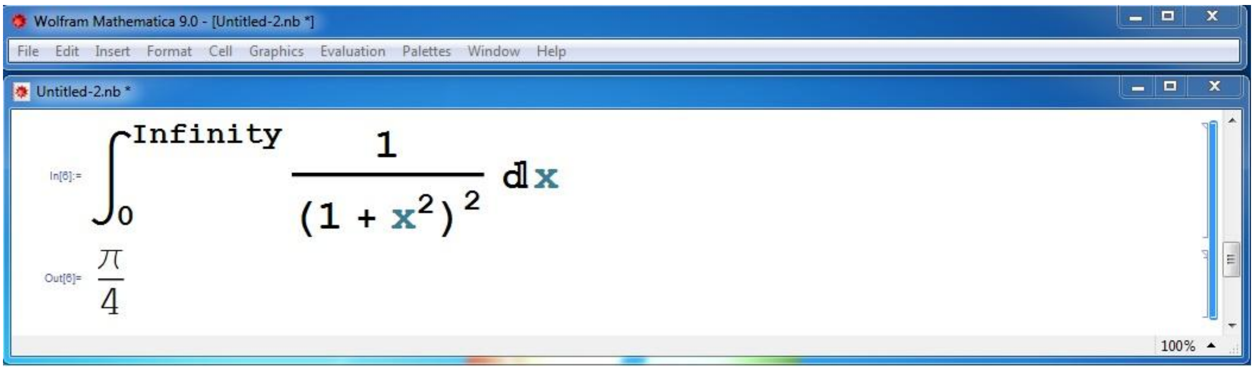

Figura 13. Calculul integralei improprii în Wolfram Mathematica

Concluzii

Această lucrare reprezintă o extensie în studiul integralelor improprii. Această extindere ne oferă posibilitatea studierii naturii integralei improprii și determinării valorii ei în caz de convergență. Din punct de vedere geometric, această extindere ne oferă posibilitatea de a da sens noțiunii de arie pentru mulțimi plane, nemărginite. Sunt prezentate un set de exemple, utilizând *Maple*, *Wolfram Mathematica*.

BIBLIOGRAFIE

1. SMIRNOV, V. I. *Curs de matematică superioară*. V. II, III. Moscova, 1971.
2. BIVOL, L.; BULAT, M. *Lecții de analiză matematică*. V.1. Chișinău, 2002.
3. ШНЕЙДЕР, В. Е.; СЛУЦКИЙ, И.; ШУМОВ. А. С. *Краткий курс высшей математики*. Москва, 1972.
4. КУДРЯВЦЕВ, Л. Д. *Курс математического анализа*. Том 2. М.: Дрофа, 2004.
5. *Elemente de calcul integral.* https://pdfslide.net/documents/elemente-de-calcul-integral-rezumat-material-publicat-.html (vizitat 10.03.2020).
6. В. Е. КОВАЛЬЧЮК, П. А. ЧАЛОВ. Лекции по математическому анализу. http://window.edu.ru/resource/186/57186/files/nesob-int.pdf (vizitat 22.03.2020).
7. MATICIUC Lucian. Integrale improprii. https://www.math.uaic.ro/~maticiuc/didactic/Seminar%201,2,3_Integrale%20improprii.pdf (vizitat 28.03.2020).

INSTRUMENTE DE COLABORARE ONLINE ÎN EDUCAȚIE

Chiriac Tatiana, *dr., conf. univ.,*
UPS „Ion Creangă" din Chișinău

CZU: 378.147:004

Abstract

This article analyzes the impact and value of online collaboration tools in education. The review begins with investigation and analyzes that show the value of collaboration in general, and addresses the specific advantages of applying cloud-based collaboration tools. Today, the method of online collaborative learning is explored from various perspectives, the most important being increasing students' academic performance, involving all students in the learning process, conditioning active learning, training and capitalizing on the cognitive and pragmatic potential of the teacher to cultivate skills, cooperation and relationships in a constantly changing society.

Key-words: online collaborative learning, online collaboration tools.

1. Introducere

Colaborarea este esențială în formarea competențelor secolului 21. În numeroase studii se menționează că, pe lângă demonstrarea stăpânirii subiectelor, cei ce învață prin colaborare își sporesc și abilitățile în rezolvarea problemelor, creativitate și relații interpersonale.

Predarea prin colaborare este o practică de predare care include grupuri de studenți ce lucrează împreună pentru a rezolva o problemă, a finaliza o sarcină sau a crea un produs. Există o tendință de colaborare în secolul XXI utilizată în pedagogie, cum ar fi predarea prin colaborare, învățarea prin colaborare, cât și analiza și lucrul în grup ca formă de colaborare colectivă. Abordată în educație, colaborarea este una dintre cele mai de succes posibilități de promovare a programelor de studiu pentru studenți. Profesorii care folosesc abordări de învățare prin colaborare nu transmit pur și simplu cunoștințe studenților, ci acționează ca profesioniști, care proiectează programe și cursuri academice pentru studenți și, totodată, ca instructori sau mentori, în special, într-un proces de învățare emergent. Actual, practic toți profesorii, studenții și comunitatea socială încorporează instrumente online utilizate pentru afaceri profesionale și personale în colaborarea lor cu alte personale. Instrumentele de colaborare online disponibile în