Rezolvăm primul sistem de ecuații și obținem $10 \cdot 29^k - 4 \cdot \cdot 29^{2k} = 7^x - 1$. Punem $k = 0$ și avem soluția $x = 1, y = 1, z == 6$.

Dacă în sistemul doi punem $k = 0$ ,obținem $2m + 5 = 1$, de unde $2m = -4$ sau $m = -2 -$ contradicție. Teorema este demonstrată.

## Bibliografie

1. Acu, D., On a Diophantine equation $2^x + 5^y = z^2$ . Gen. Math.,vol.15, Nr.1(2007), pp.145-148.
2. Pumnea, C.E., Nicoara, A. D., On a Diophantine equation of $a^x + b^y = z^2$ type. Gen. Math., vol.4, Nr.1(2008), pp.65-75.
3. Rabago, J., On the Diophantine equation of $2^x + 17^y = z^2$. J. Indones. Math. Soc., vol.22. No.2(2016), pp 85-88.
4. Rabago, J., On Two Diophantine equations $3^x + 19^y = z^2$ and $3^x + 91^y = z^2$ International Jurnal of Mathematics and Scientific Comuting, vol. 3, Nr. 1(2013), pp.28-29.
5. Sroysang, B., More on the Diophantine equation $2^x + 19^y == z^2$ . International Jurnal of Pure and Applied Mathematics, vol. 88, Nr. 1(2013), pp.157-160.

# APLICAȚII ALE SERIILOR FOURIER ÎN MAPLE

***Zinaida GHILAN, dr., conf. univ.,***
***Victor PRICOP, dr., conf. univ.***

***Summary***

*This paper talks about applications of the Maple program on the Fourier series. This software can be used as computing and training environments. In this paper we will present some examples of development of the Fourier series, calculation of Fourier coefficients in Maple will represent an analysis of harmonic (frequency) content of the signal (vibration control).*

Un şir de fenomene şi procese, care destul de des se întâlnesc în natură şi în tehnică, posedă proprietăţi, care, după un anumit interval de timp, se repetă. Un mijloc de prezentare şi studiu al acestora, îl constitute dezvoltarea în serie Fourier. Seriile Fourier au multe utilizări practice, pentru că manipularea și conceptualizarea coeficienților armonici sunt adesea mai ușoare decât lucrul cu funcția originală. Termenii unei serii Fourier sunt funcţii periodice cu care putem descrie diverse semnale fizice – acustice, optice, sunete muzicale, diverse unde electromagnetice, raze X, lumină, zgomote, impulsuri, prelucrarea semnalelor și a imaginilor etc.

Reamintim că dacă funcţia $f(t)$ definită pe $R$ este periodică de perioada $T$ $(T \neq 0)$, atunci și funcția $f(t+T) = f(t)$ este periodică, cu excepția a unor puncte izolate. Perioadele 2T, 3T și, în general, numărul $kT$ $(k \in Z)$ sunt de asemenea perioade ale acestei funcţii.

Cele mai simple funcţii trigonometrice sunt *sinx* şi *cosx* cu perioada egală cu $2\pi$ . Astfel, funcţiile $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ şi $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ reprezintă unul din cele mai simple procese periodice, cu ajutorul cărora putem descrie oscilațiile armonice.

Oscilațiile armonice – sunt mișcări ale unor corpuri, însoțite de modificări de stare, repetate la diverse intervale de timp și urmând aceeași traiectorie. Toate obiectele din jurul nostru vibrează: lichidele, gazele, solidele, lumina, corzile sau tuburile instrumentelor muzicale etc. Unele o fac periodic – pendule, inimi, sunete, iar dacă modificările se referă la mărimi mecanice (deplasări, abateri, viteze), atunci se obțin oscilații mecanice; dar se întâlnesc de asemenea oscilații termice, electrice, radioactive, subatomice etc.

Oscilațiile periodice sunt cele la care parametri de stare le descriu funcția:

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (1)$$

formula (1) – se numeşte ecuație armonică simplă, iar numărul $A$ – amplitudinea oscilaţiei, $\omega -$ frecvența, $\varphi -$ faza iniţială, $t$ – timpul. Este o funcţie periodică cu perioada $\frac{2\pi}{\omega}$ . În cazul unui număr mai mare de armonici simple, obţinem armonică compusă, unde poate fi reprezentată sub forma unei sume de armonici simple, adică:

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) +$$
$$+ A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + ... = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\sin n\omega t + \varphi_n), \qquad (2)$$

unde $\omega, 2\omega, 3\omega$ - frecvențele şi respectiv perioadele - $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, ...$ vom obţine o funcţie periodică cu perioada $T$. Observăm că funcția $\varphi(t)$ nu este o sinusoidă pură, ci este o suprapunere de oscilații armonice, având diverse amplitudini și faze. În dezvoltarea (2) notăm prin $x = \omega t = \frac{2\pi t}{T}$, atunci funcţia $\varphi(t)$ va fi o funcţie ce depinde de $x$ şi, deci, $f(x) = \varphi(\frac{x}{\omega})$. Determinarea acestor mărimi reprezintă analiza unui semnal periodic $f(x)$ [4], [3].

Descompunem $\sin(nx + \varphi_n) = \sin nx \cdot \cos\varphi_n + \cos nx \cdot \sin\varphi_n$ și notăm $A_0 = a_0,\ A_n \cdot \sin\varphi_n = a_n,\ A_n \cdot \cos\varphi_n = b_n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$. Obținem

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot \cos x + b_1 \cdot \sin x + a_2 \cdot \cos 2x + b_2 \cdot \sin 2x + ...$$
$$+ a_n \cos nx + b_n \cdot \sin nx = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (3)$$

***Definiție.*** *Se numește serie trigonometrică seria de forma*:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}) \qquad (4)$$

Admitem că seria trigonometrică (4) este convergentă, atunci suma ei va fi o funcție periodică de perioada $T = 2\pi$, dezvoltată după sinusuri și cosinusuri, care o putem utiliza în cercetarea diferitor funcții date, într-un anumit interval, obţinută cu ajutorul sistemului trigonometric fundamental:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ... \quad (5)$$

Așa dar, dacă $f(x)$ de perioada $T = 2l$, se dezvoltă într-o serie trigonometrică uniform convergentă pe intervalul $[-l, l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

atunci coeficienții acestei serii se determină prin formulele

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, ...\} \\ b_n &= l\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, ...\} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Coeficienții $a_0$, $a_n$, $b_n$ se numesc coeficienții Euler-Fourier. Limitele $-l$, $l$ ale integralelor din (6) pot fi înlocuite cu oricare altele, dar cu condiția că pe axa numerică ele să mărginească un interval de lungimea $2l$.

În caz particular, când perioada tuturor armonicilor este egală cu $2\pi$, adică $l = \pi$ atunci funcția $f(x)$ se dezvoltă în serie de forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (7)$$

iar formulele (6) iau forma

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\pi x dx, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, ...\} \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\pi x dx, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, ...\} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Coeficienții $a_{0,}\ a_n, b_n, n \in \{1, 2, 3, 4,...\}$ pot fi determinați conform formulei (8).

Calculul coeficienților *Fourier* reprezintă analiza conținutului armonic (frecvențial) al semnalului. În cadrul procesării unui semnal, unele armonici pot fi eliminate, atenuate sau amplificate, filtrate, combinate cu alte semnale. Analiza *Fourier* este utilizată pentru controlul vibrațiilor unui motor, în determinarea defectelor, în bătăile inimii, în urmărirea sunetelor unor instrumente muzicale cu coarde etc.

Totalizând cele spuse, se mai cere să fie stabilite condițiile în care funcția $f(x)$ se dezvoltată în serie Fourier.

Fără demonstrare, vom formula condițiile suficiente.

***Teoremă*** (Condițiile lui *Dirichlet*) [1]. *Dacă* $f(x)$ *este o funcție periodică de perioada* $2l$ *și satisface condițiile lui Dirichlet pe orice interval, atunci seria Fourier asociată acestei funcții este convergentă pe toată axa numerică; în punctele de continuitate ale funcției, suma seriei Fourier* $S(x)$ *este egală cu valoarea funcției* $f(x)$*, iar în fiecare punct de discontinuitate a funcției, suma seriei este egală cu media aritmetică a limitelor laterale ale funcției în acest punct, adică*:

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0+0) + f(x_0-0)\right)$$

Demonstrația teoremei este dificilă și este dată în lucrarea [2].

Vom analiza câteva exemple în Maple.

**Exemplul 1**. Să se dezvolte în seria Fourier funcția $f(x)=x$ cu perioada $2\pi$ în intervalul $-\pi < x \le \pi$ [3].

*Rezolvare*. Aceasta funcție satisface condițiile *Dirichlet,* și, prin urmare, poate fi dezvoltată în seria Fourier. Vom determina coeficienții Euler-Fourier, utilizând formulele (8).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = 0, \quad a_0 = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right] = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left(\cos n\pi - \cos n\pi\right) = 0, \quad a_n = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[-\pi\cos n\pi - \pi\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin n\pi - \frac{1}{n^2}\sin n\pi\right] =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n}, \quad b_n = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

Astfel, am obținut

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0,$$

$$b_1 = \frac{2}{1}, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = \frac{2}{3}, \quad b_4 = -\frac{2}{4}, \ldots$$

Prin urmare, seria Fourier pentru funcția $f(x)$ are forma:

$$2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n \sin nx}{n}\right] \qquad (9)$$

Funcția $f(x)$ satisface condițiile *Dirichlet.* Se observă că funcția are discontinuități de ordinul întâi în punctele $x = -\pi n$ și $x = \pi n$ $\quad n \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ și suma seriei este egală cu zero.

În fig. 1.1 - 1.9 sunt prezentate rezultatele obținute cu ajutorul programului Maple.

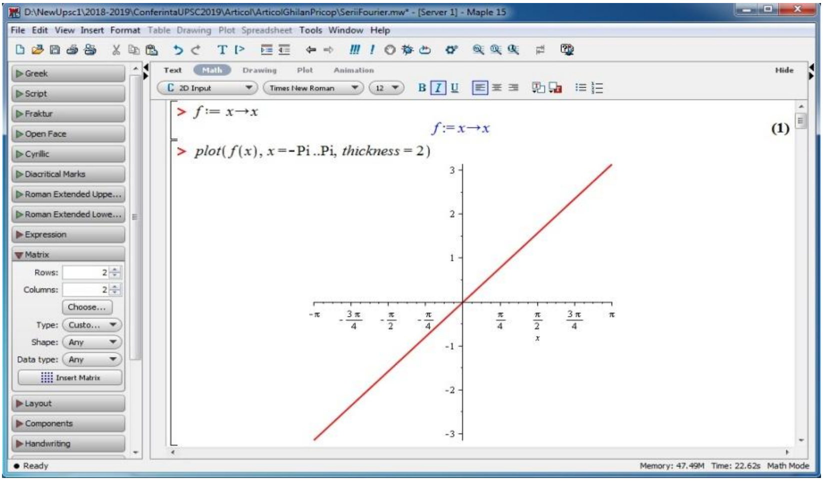


***Fig. 1.1. Funcția f(x)=x***

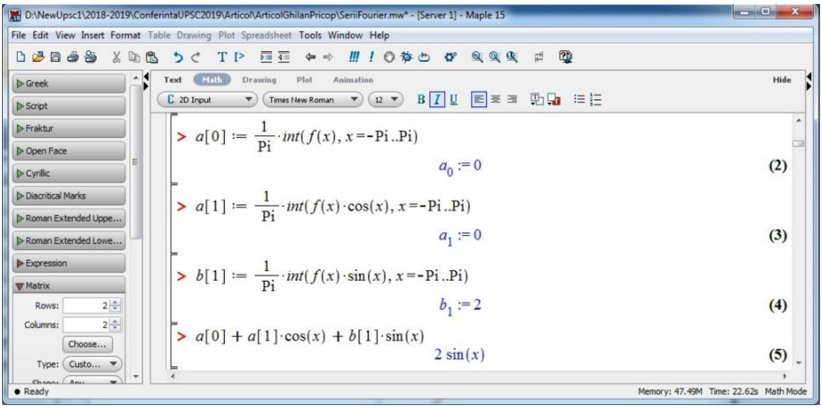


***Fig. 1.2. Primii coeficienți și seria corespunzătoare***

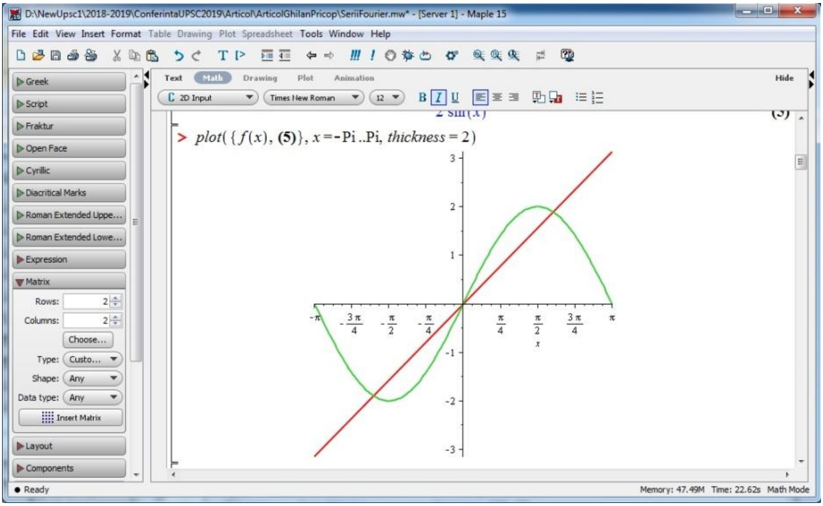


*Fig. 1.3. Graficele funcției și seriei Fourier pentru primii 2 termeni*

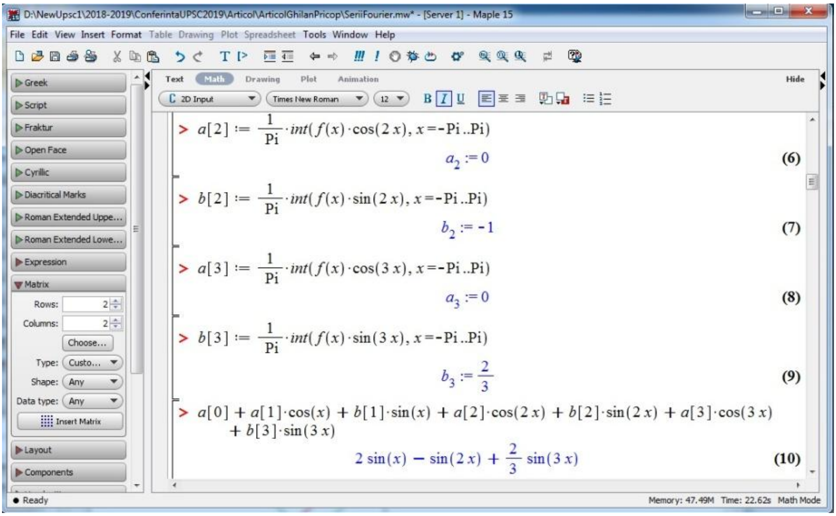


*Fig. 1.4. Coeficienții până la n=3 și seria corespunzătoare*

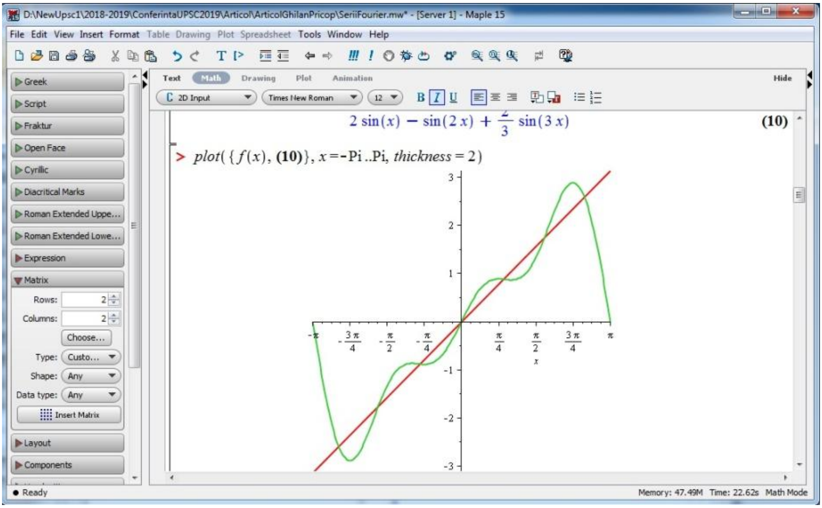


*Fig. 1.5. Graficele funcției și seriei Fourier până la n=3*

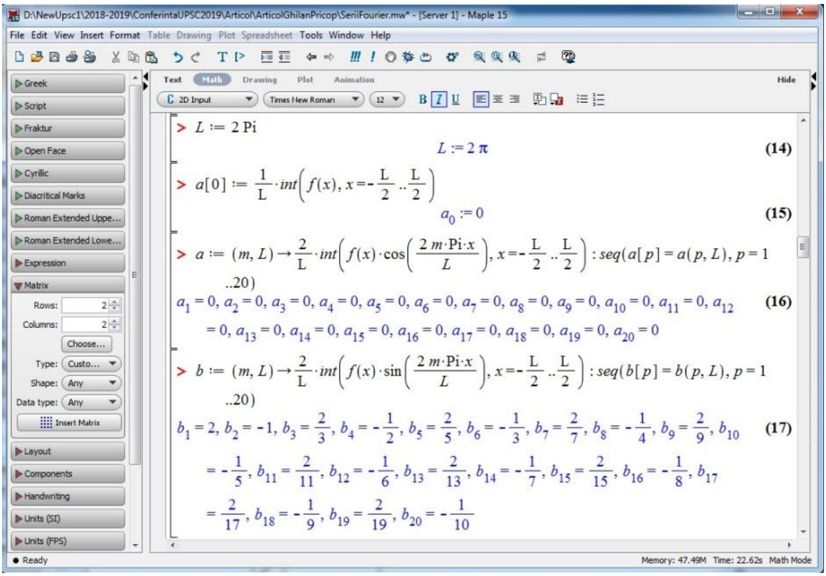


*Fig. 1.6. Coeficienții până la n=20*

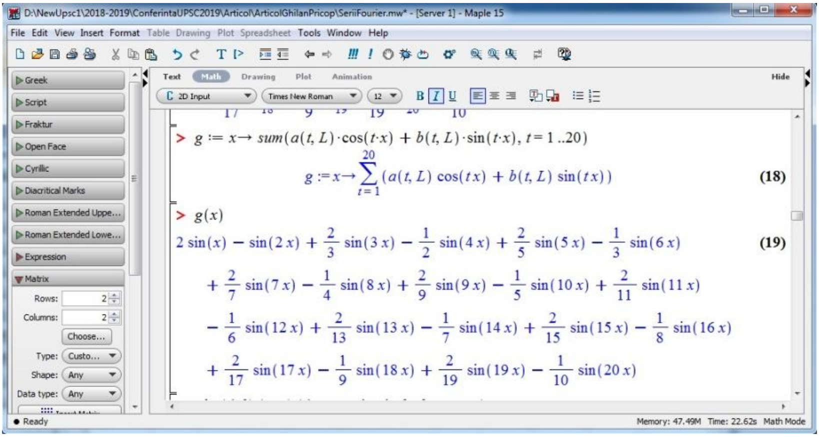


***Fig. 1.7. Seria Fourier până la n=20***

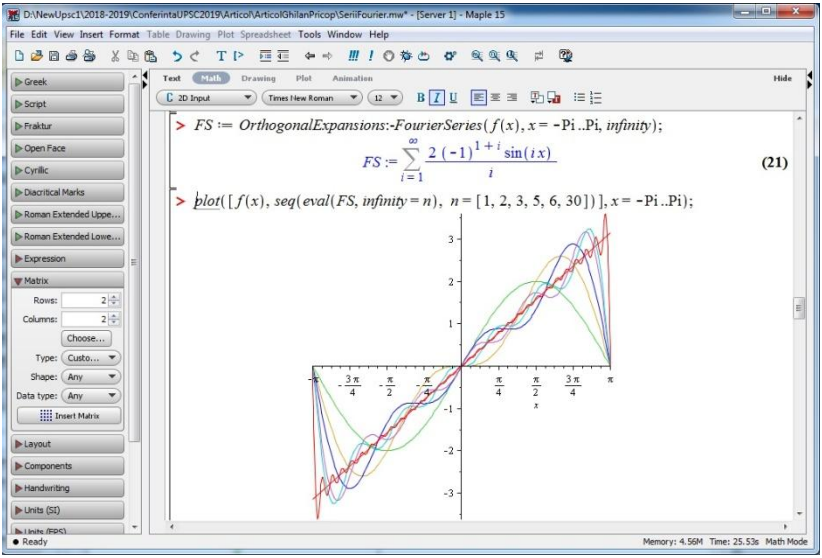


***Fig. 1.8. Graficele funcției și seriei Fourier pentru n=1,2,3,5,6,30***

Să analizăm un caz particular, $x = \dfrac{\pi}{2}$ înlocuim în formula (9), obținem că:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}=2\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1}-\frac{\sin\pi}{2}+\frac{\sin 3\frac{\pi}{2}}{3}-\frac{\sin 2\pi}{4}+\ldots\right]$$ sau

$$\frac{\pi}{2}=2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\right]$$

Aflăm suma seriei $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\ldots=\frac{\pi}{4}$.

**Exemplu**. Să se dezvolte în seria Fourier funcția

$$f(x)=\begin{cases} x, & dacă \quad 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & dacă \quad \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \end{cases}.$$

*Rezolvare*. Funcția este periodică cu perioada $2\pi$ și satisface condițiile *Dirichlet.* Vom găsi coeficienții Euler-Fourier, utilizând formulele (8).

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left.\frac{\pi}{2}x\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]=\frac{3\pi}{8},\quad a_0=\frac{3\pi}{8}.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\,dx+\right.$$

$$\left.+\left.\frac{\pi}{2n}\cos nx\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi\sin\frac{\pi n}{2}}{2n}+\frac{1}{n^2}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{1}{n^2}\cos n\cdot 0+\frac{\pi}{2n}\sin n\pi-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{2n}\sin n\frac{\pi}{2}\right]=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right),\quad a_n=\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right).$$

$b_n=0$

am obținut

$$a_0 = \frac{3\pi}{8},\ a_1 = -\frac{2}{\pi}\cos x,\ \ a_2 = -\frac{4}{\pi}\frac{\cos 2x}{2^2},\ \ a_3 = \frac{2}{\pi}\frac{\cos 3x}{3^2},$$

$$a_4 = -\frac{4}{\pi}\frac{\cos 4x}{4^2},\ \ a_5 = \frac{2}{\pi}\frac{\cos 5x}{5^2},\ldots$$

$b_n = 0.$

Seria Fourier are forma:

$$f(x) = \frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - 1\right)\cos x.$$

Reprezentare grafică în Maple (fig. 2.1-2.2).

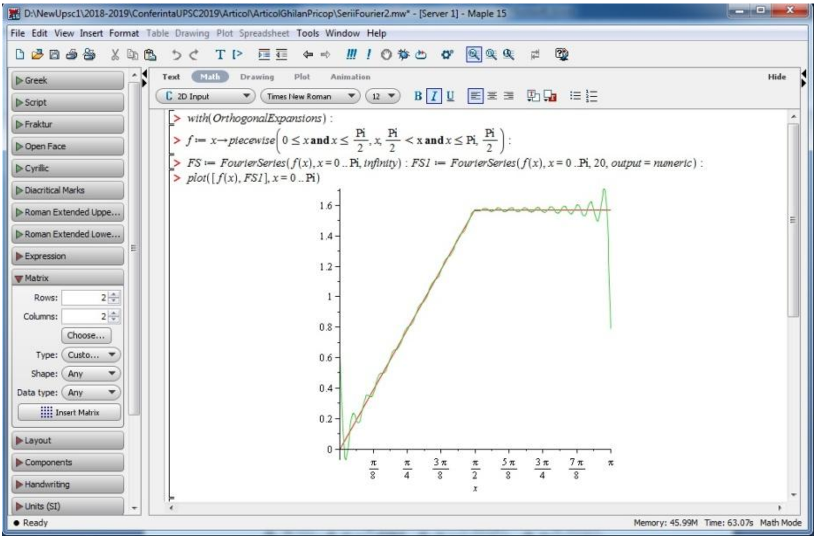


*Fig. 2.1. Graficele funcției și seriei Fourier pentru n=20*

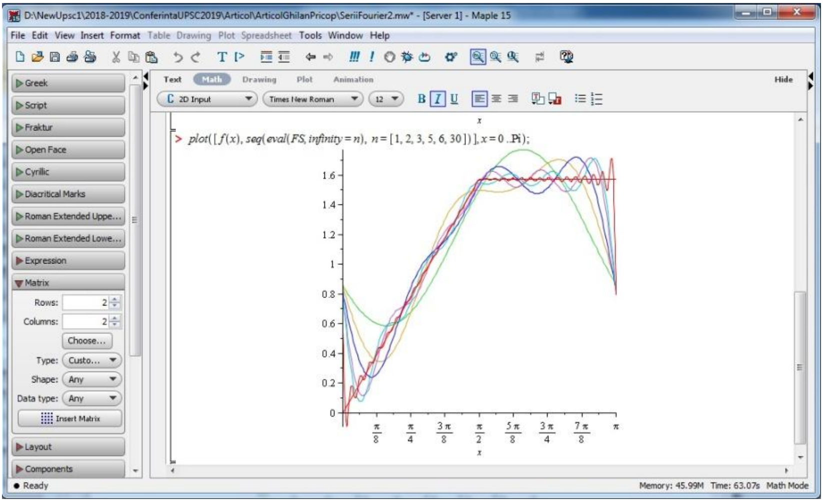

***Fig. 2.2. Graficele funcției și seriei Fourier pentru n=1,2,3,5,6,30***

Putem menționa că pentru funcția $f(x)$ periodică de perioada $T = 2\pi$ se evidențiază două cazuri:

a) funcția este pară, se calculează coeficienții $a_0$ și $a_n$ , iar $b_n$ sunt egali cu zero;

b) pentru funcții impare se determină numai coeficienții $b_{n,}$ iar coeficienții $a_0$ și $a_n$ sunt egali cu zero.

Acestea ne permit să analizăm succint funcția ce urmează să fie dezvoltată în seria Fourier.

## Concluzii

Maple este un software matematic interactiv care permite utilizarea diferitor comenzi ce conțin simboluri, necunoscute și operații formale. El cuprinde toate compartimentele matematicii contemporane. Am prezentat câteva comenzi, cu ajutorul cărora pot fi obținute dezvoltarea în serie Fourier a unor funcții.

Pe de altă parte, utilizarea acestui pachet ne dă posibilitate să determinăm și ilustrăm grafic oscilațiile armonice.

**Bibliografie**

1. Bivol, L., Bulat, M., *Lecții de analiza matematică*, v. II, Chișinău, 2004.
2. Stănășilă, O., *Analiză matematică*. Floarea Darurilor, 2014.
3. Шнейдер, Б. Е., Слуцкий, А. И., Шумов, А. С., *Краткий курс высшей математики*, Москва, 1972.
4. Фихтенгольц, Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, том. 3, Москва, 1960.


## e FLUX: MANUAL DIGITAL INTERACTIV DE STUDIERE A LIMBII FRANCEZE


***Nicolae BALMUȘ, dr. conf. univ.,***

***Ana BULAT, lector***



***Summary***

*This paper is a brief description of the e-FLUX-interactive digital handbook (IDH) designed and implemented in the Delphi programming environment. This handbook contains specific interactions of the teaching process of French language (dictations, phonetic transcription exercises, gaps, words classification, etc.).*


Începând cu anul 2010, în lume se dezvoltă activ concepția manualului digital (SUA, Franța, Coreea de Sud etc). În România, începând cu anul 2016, manualul digital a devenit o realitate. Pe site-ul Ministerului Educației Naționale [5] poate fi consultat on-line, practic, tot setul de manuale digitale interactive pentru clasele I-VI. Pe site-ul editurii Prosveșcenie [4] din Rusia pot fi descărcate integral unele manuale școlare în format digital interactiv.

Manualele digitale, disponibile la momentul dat, conțin diverse interactivități: secvențe audio, video, teste etc., dar toate, de regulă, rigide. Utilizatorul final (profesorul/elevul) nu poate modifica niciuna din resursele manualului digital, la fel ca și în manualul tipărit.

O versiune de manual digital interactiv redactabil a fost prezentă și publicată în volumul *Conferință Națională de Învățământ*