Demonstrație. Consideram isotopul $x * y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y$. Din relația $x{*}Ix{=}ba$ obținem $R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}\bar{I}x = ba$. Cum $(Q,\cdot)$ este CI buclă ,rezultă $\bar{I} = L_b\, L_{ba}I^{-1}R_a^{-1}$.

Fie $(Q,*)$ este o buclă WIP , deci se verifică relația $x * \bar{I}(y * x) = \bar{I}y$. Atunci $R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}\bar{I}\left(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x\right) = \bar{I}y$. Cum $(Q,\cdot)$ este CI buclă avem $L_b^{-1}\bar{I}\left(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x\right) = \bar{I}y \cdot IR_a^{-1}x$. Înlocuim $\bar{I}$ şi obținem $L_{ba}IR_a^{-1}\left(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x\right) == L_bL_{ba}I^{-1}R_a^{-1}\,y \cdot IR_a^{-1}x$. Substituim x prin L_bx, y prin R_ay şi obținem $L_{ba}IR_a^{-1}(\,y \cdot x) = L_bL_{ba}I\,y \cdot IR_a^{-1}L_bx$. Cum $(Q,\cdot)$ este CI buclă $L_{ba}IL_{I^{-1}a}(\,y \cdot x) = L_bL_{ba}I\,y \cdot IL_{I^{-1}a}\,L_bx$. În bucla CI substituția I posedă proprietatea $I(\,y \cdot x) = I(y \cdot x)$. Atunci $L_{ba}L_a(\,y \cdot x) = L_bL_{ba}\,y \cdot L_a\,L_{Ib}x$. Dacă $b = 1,$ obținem $(\,\cdot\,) = \cdot$. Punem $= 1$ .Atunci $\cdot = \cdot$. Înlocuim prin . Atunci $(\,\cdot\,)\cdot = \cdot$. Punem acum y= 1 şi obținem $(\,\cdot\,)\cdot = \cdot$. Substituim prin . Atunci $(\,\cdot\,)\cdot = \cdot(\,\cdot\,)$ sau $(\,\cdot\,)\cdot = \cdot$, deci $(,\cdot)$ este o buclă Moufang comutativă. Teorema este demonstrată.

Bibliografie

1. Artzy, R., On loops with special property, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6(1955), pp. 448-453.
2. Mufang, R., Zur Struktur von Alternativ Korpern. *Math. Ann.*1935,110, pp. 416-430.
3. Белоусов, В., *Основы Теории Квазигрупп и Луп*, Издательство «Наука», Москва, 1967.

PROBLEME CU LIMITE DE FUNCȚII

GHILAN Zinaida, dr., conf. univ.,
COVALSCHI Anatolie, lector

Summary

In this paper we present some brief definitions, concepts and properties that can be used to solve the problems with limits of functions. The concept of the limit of a function at a point is rooted in

the XVII and XVIII centuries. The definition of the limit of a function at a point was formulated by Karl Weierstrass, using the concept of a point neighborhood. The calculation of limits of functions supposes knowledge of methods for determining the limits of elementary functions, limits of remarkable and of the algorithms to eliminate non-determinations that may arise in this context.

În analiza matematică, prin *limită* a unei funcții într-un punct din domeniul de definiție se înțelege o valoare de care valoarea funcției se apropie oricât de mult atunci când valoarea de intrare (argumentul funcției) se apropie suficient de mult de punctul în care se caută limita. În limbajul curent, înțelesul obişnuit al termenului *limită* este acela de graniță, hotar; figurativ, prin limită se înțelege un punct până la care pot ajunge posibilitățile sau mijloacele cuiva. În matematică, limita unui şir şi (sau) limita unei funcții într-un punct este un număr. Studierea analizei matematice în şcoală începe cu studierea noțiunilor de limită şi continuitatea funcțiilor, care se consideră una din cele mai dificile noțiuni matematice. În aceasta lucrare se propun un şir de exerciții, care cere o cunoaştere profundă şi conştientă a materialului teoretic.

Definiție. Se spune că numărul l este limita funcției $y= f(x)$ în punctul x_0, când x tinde către x_0, şi scriem $f(x) \to l$ când $x \to x_0$ sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ arbitrar, există un astfel de număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, încât din inegalitatea $0 < |x - x_0| < \delta$ rezultă inegalitatea $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Exemplul 1. *Să demonstrăm că*: $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$

Rezolvare: Conform definiției trebuie să demonstrăm că pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ se poate afla un astfel de număr $\delta > 0$, încît din inegalitatea $0 < |x - 3| < \delta$ rezultă inegalitatea $|x^2 - 9| = |x + 3| \cdot |x - 3| < \varepsilon$.

Numărul δ îl vom alege treptat. Inițial vom considera vecinătatea punctului 3 de raza 1 ($\delta = 1$), adică valorile lui *x* pentru care $|x-3| < 1$.

În vecinătatea considerată avem $|x+3| = |x-3+6| \le |x-3| + 6 < 7$, deci $|x+3| \cdot |x-3| < 7|x-3|$.

Pentru ca inegalitatea să fie adevărată, este suficient ca $|x-3| < \frac{\varepsilon}{7}$.

Aşadar $\delta = \min(1; \frac{\varepsilon}{7})$.

Exemplul 2. *Să se calculeze limitele*

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1}$

Rezolvare: În acest caz avem nedeterminare $\frac{0}{0}$. Dacă vom încerca să scriem polinomul de la numărător ca produs de două polinoame $(x^2+2)\cdot(x^2-1)$, atunci

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+2)(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} (x^2+2) = 3.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

Rezolvare: Înlocuim valoarea lui *x=0* în limita funcției şi obținem nedeterminare $\frac{0}{0}$. Înmulțim numărătorul şi numitorul la conjugatul funcției de la numărător, în rezultatul unor transformări obținem

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)\cdot\left(1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)}{x^2\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos^2 x\cdot\cos 2x\right)}{x^2\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos^2 x\cdot(1-2\sin^2 x)\right)}{x^2\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin^2 x(3-2\sin^2 x)\right)}{x^2\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot(3-2\sin^2 x)}{x^2\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(3-2\sin^2 x)}{\left(1+\cos x\sqrt{\cos 2x}\right)}=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

Rezolvare: În acest exercițiu baza limitei este egală cu 1, iar puterea numărului tinde la infinit şi avem nedeterminarea de tipul 1^{∞}. Deseori în acest caz se spune că avem *„nedeterminarea de tip e”*. Pentru a rezolva o astfel de nedeterminare este suficient ca baza limitei să o exprimăm prin $\left(1+\alpha\right)$, iar puterea $\frac{1}{\alpha}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3}{2x+1}-1\right)^{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3-2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2(x+1)}{2x+1}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(2+\frac{2}{x})}{x(2+\frac{1}{x})}}=e.$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} x-\sqrt{x^2-2x+2}$.

$$\lim_{x\to\infty}x-\sqrt{x^2-2x+2}=\left(\infty-\infty\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-2x+2}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}\right)}{x+\sqrt{x^2-2x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x-2}{x+\sqrt{x^2-2x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{x+\sqrt{x^2-2x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(2-\frac{2}{x})}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}=1$$

Exemplul 3. Fie funcția $f:R\to R$, definită prin

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin m(x^2-2x-3)}{n(x-3)}, dacă\ x<3\\ \dfrac{n}{m+2^{\frac{n}{3-x}}}, dacă\ x>3\\ m+n+1, dacă\ x=3\end{cases}$$, unde m şi n sunt

parametri reali. Să se determine valorile parametrilor *m* şi *n* pentru care funcţia *f* are limită în punctul *x=3*. În ce caz aceasta limită este egală cu f(3)?

Rezolvare: Din condiţia problemei rezultă că $n \neq 0$.

a) Fie $n<0$, atunci calculând limita de dreapta în punctul $x=3$ obţinem

$$l_d = \lim_{x\to 3+0} \frac{n}{m+2^{\frac{n}{3-x}}} = \frac{n}{m+2^{\frac{n}{0}}} = \frac{n}{m+2^{\infty}} = 0$$

şi respectiv pentru limita de stînga

$$l_s = \lim_{x\to 3-0} \frac{\sin m(x^2-2x-3)}{n(x-3)} = \lim_{x\to 3-0} \frac{\sin m(x^2-2x-3)}{m(x^2-2x-3)} \cdot \frac{m(x-3)(x+1)}{n(x-3)} =$$

$$= \frac{m}{n} \lim_{x\to 3-0} (x+1) = 4\frac{m}{n}$$

Dacă $4\frac{m}{n} = 0$, adică $m=0$ în acest caz funcţia $f(x)$ are limită în punctul $x=3$ şi $\lim_{x\to 3} f(x) = l_d(3) = l_s(3) = 0.$ Calculăm valoarea funcţiei pentru $x=3$, $f(3)=m+n+1$, $m=0$, atunci rezolvând ecuaţia $m+n+1=0$ obţinem $m=0$ şi $n=-1$.

b) Pentru $n>0$. atunci ca şi în cazul *a)* calculăm limitele funcţiei de dreapta şi de stînga. De unde

$$l_d = \lim_{x\to 3+0} \frac{n}{m+2^{\frac{n}{3-x}}} = \frac{n}{m+2^{\frac{n}{0}}} = \frac{n}{m+2^{-\infty}} = \frac{n}{m}$$

$$l_s = \lim_{x\to 3-0} \frac{\sin m(x^2-2x-3)}{n(x-3)} = \lim_{x\to 3-0} \frac{\sin m(x^2-2x-3)}{m(x^2-2x-3)} \cdot \frac{m(x-3)(x+1)}{n(x-3)} =$$

$$= \frac{m}{n} \lim_{x\to 3-0} (x+1) = 4\frac{m}{n}$$

Funcţia are limită în punctul $x=3$, dacă $l_d(3) = l_s(3)$, atunci

$\frac{4m}{n}=\frac{n}{m}$, de unde obținem $4m^2=n^2$ şi *n>0,* $2m=\pm n.$ Avem două cazuri: *2m=n* cu limita $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\frac{n}{m}=2$ şi *2m=-n* cu limita $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\frac{n}{m}=-2$. Condiția problemei $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$ ne aduce la două sisteme de ecuații $\begin{cases} 2m=n \\ m+n+1=2 \end{cases}$ şi $\begin{cases} 2m=-n \\ m+n+1=-2 \end{cases}$.

Rezolvând aceste sisteme de ecuații obținem următoarele soluții $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ şi *(3;-6)* şi numai prima satisface condiția n>0.

Astfel funcția *f(x)* are limită în punctul *m=0* şi n<0 sau $2|m|=n$ şi *n>0*. Limita dată coincide cu *f(3)* şi *n=-1* sau $m=\frac{1}{3}$ şi $n=\frac{2}{3}$.

Exemplul 4. Fie funcția $f:R\to R,$ definită prin

$$f(x)=\begin{cases} \frac{e^x-e}{x-1}, dacă \quad x<1 \\ \frac{ex^2}{m}, \qquad dacă\ x\geq 1 \end{cases}.$$

Să se determine valorile parametrului *m* pentru care funcția *f* are limită în punctul *x=1*.

Rezolvare: Calculăm limita la dreapta în punctul *x=1* şi $m\neq 0$, de unde obținem $l_d(1)=\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{ex^2}{m}=\frac{e}{m}$. Analog se calculează limita de stînga în punctul x=1, avem $l_s(1)=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-0} e\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=e\cdot 1.$ Funcția *f(x)* are limită în punctul *x=1,* dacă şi numai dacă $l_s(1)=l_d(1)\Rightarrow e=\frac{e}{m}\Rightarrow m=1.$

Exemplul 5. $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{x}, \; dac\breve{a} \quad x<-1,\\ 2-x^2, \quad dac\breve{a} \quad -1\le x<2,\\ -3, \quad dac\breve{a} \quad x\ge 2.\end{cases}$

Să se studieze continuitatea funcţiei.

Rezolvare: Din teorema despre continuitatea sumei, produsului, cîtului funcţiilor rezultă că funcţia este continuă în orice punct pentru $x\ne -1$ şi $x\ne 2$. Vom studia continuitatea funcţiei în punctul x=-1. Calculăm $l_s=\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}\frac{2x+1}{x}=1$, $l_d=\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0}(2-x^2)=1$ şi $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(2-x^2)=1$. Aşa dar $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)=1$. Prin urmare funcţia este continuă în punctul *x=-1.*

Să analizăm continuitatea funcţiei în punctul x=2. Calculăm

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(2-x^2)=\lim_{x\to 2}(2-x^2)=-2,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(-3)=\lim_{x\to 2}(-3)=-3.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 2+0} f(x),$ atunci $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ nu există. Prin urmare funcţia f(x) în punctual *x=2* nu este continuă ci *x=2* este punct de discontinuitate.

Bibliografie

1. Галицкий, М.Л., Мошкович, М. М., Шварцбург, С.И., *Изучение курса алгебры и математического анализа*, М., 1986.
2. Bivol, L., Bulat, M., Lecţii de analiza matematică, Evrica, Chişinău, 2002.

3. Nicolescu, M., Nicolescu, C., *Analiza matematică. Exerciții și probleme pentru elevii claselor XI-XII*. Concursul de admitere în învățământul superior, București, 2000.

SECȚIUNEA DE AUR ÎN ARTĂ

PORT Sergiu, dr., conf. univ.,
TRIFAN Veronica, lector univ.

Summary

This Article play the surprising properties of the golden section in art.

Number PHI (1.618 ...) is called the number (area) of gold, because it defines the harmonic proportions of the human body and biological spiral of living organisms. The number of the gold is present in particular in nature: plant, animal, human body; also architectural constructions and works of art: paintings, statuary.

PHI este unul dintre numerele considerate magice de matematicieni şi artişti pentru că redă proporția după care ar fi construit Universul şi este totodată o „mască" a frumuseții.

Acest număr este utilizat mai des în forma sa scurtă de 1,618. Uimitor este că fauna, plantele, corpul uman şi apoi construcții arhitecturale, cum ar fi Marea Piramidă din Egipt şi catedrala Notre Dame din Paris respectă această proporție de aur.

Fenomenul dat se observă la *Omul vitruvian* al lui Leonardo da Vinci. Or, în corpul omenesc se găseşte această proporție: ombilicul împarte corpul în secțiunea de aur (distanța de la ombilic la genunchi şi distanța de la genunchi la sol, distanta de la ombilic la sol şi distanta de la ombilic la genunchi), înălțimea corpului, distanța de la umăr la degetul mijlociu şi distanța de la linia umerilor la vârful capului şi lungimea capului – toate aceste exemple se referă la acest număr. De asemenea, segmentele brațului si ale palmei sunt proporționate în secțiunea de aur.