SOLUȚIONAREA ECUAȚIILOR ȘI SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE CU AJUTORUL APLICAȚIEI MAPLE

PORT Sergiu, dr., conf. univ.,
NEAGU Natalia, lector universitar

Summary

In this article we show traditional solving of differential equations and using Maple, because they play an important role in many disciplines including engineering, physics, economics, biology, etc. Maple is the world leader when it comes solving and constructions of graphics.

Ecuațiile diferențiale reprezintă unul dintre cele mai importante instrumente matematice, necesar pentru înțelegerea unor fenomene din mecanică, fizică, etc. Odată stabilit, fenomenul fizico-tehnic şi ecuațiile diferențiale care îl guvernează, coeficienții și condiții la limită, rămâne să-i determinăm soluțiile.

În caz general, o ecuație diferențială de ordinul n are forma

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

unde este inclusă variabila independentă x, funcția necunoscută y şi derivatele acesteia pînă la ordinul n.

Se cunosc mai multe metode standarte de soluționare a ecuațiilor diferențiale [1], în dependență de tipul ecuației (1).

Soluțiile ecuațiilor diferențiale pot fi obținute, de asemenea, și cu ajutorul aplicației Maple, utilizînd comanda de soluționare *dsolve*, care are sintaxa

> *dsolve({ecuatia_diferentiala, conditii_initiale}, optiuni).*

Opțiunile sunt de forma *cuvînt cheie=valoare*, însă prezența lor și a condițiilor inițiale nu este obligatorie.

Derivatele se scriu utilizînd sintaxa *diff* sau *D*, dacă derivata este de ordinul *k*, atunci *diff*(*y*(*x*),*$k*) sau (*D@@k*)(*y*)(*x*), iar condiția inițială de forma $y^{(k)}(x_0)=y_0k$, se scrie prin $(D@@k)(y)(x_0)=y_0k$.

Graficul soluțiilor aproximative se reprezintă utilizînd comanda Deplot, iar în cazul reprezentărilor tridimensionale - *DEplot3d*. Comenzile *DEplot* şi *DEplot3d* fac parte din pachetul *DEtools*, deci înainte da a fi utilizate, trebuie încărcat pachetul respectiv - *with*(*DEtools*).

Exemplul 1. Rezolvați ecuația diferențială $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin(x)}{x}$.

Ecuația dată este liniară de ordinal I, în conformitate cu [2] obținem soluția generală a ecuației

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx} [\int \frac{\sin(x)}{x} e^{\int \frac{1}{x}dx} dx + C] = e^{-\ln|x|} [\int \frac{\sin(x)}{x} e^{\ln|x|} dx + C] =$$

$$\frac{1}{x} (\int \frac{\sin(x)}{x} x dx + C) = \frac{1}{x} (\int \sin(x) dx + C) = \frac{1}{x} (-\cos(x) + C)$$

Răspuns: $\frac{1}{x} (-\cos(x) + C)$

Pentru a rezolva ecuația din exemplul 1, în Maple, prin metoda directă, se introduce ecuația, conform comenzilor descrise mai sus, apoi se tastează *Enter* (fig. 1).

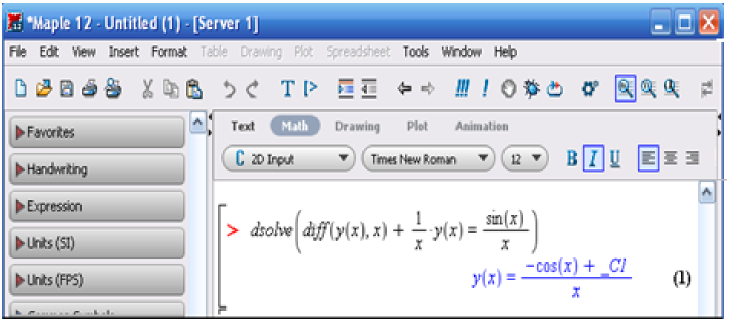

Fig. 1. Soluționarea ecuației diferențiale de ordinul I, în Maple, prin comenzi directe

Observație. Rezultatele obținute prin metoda standartă (teoretică) și prin Maple sunt egale.

Exemplul 2. Rezolvați ecuația diferențială $2 \cdot y'' + 5 \cdot y' = 2\sin x \cdot \cos 2x$.

Este dată o ecuație de ordinul II neomogenă. Se transformă partea dreaptă a ecuației ca o sumă de funcții elementare

$$2\sin x \cdot \cos 2x = \frac{2(\sin(x+2x) + \sin(x-2x))}{2} = \sin 3x - \sin x$$

Formăm ecuația caracteristică

$$2r^2 + 5r = 0 \Longrightarrow r_1 = 0, r_2 = -\frac{5}{2}$$

$$\Phi(x) = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x}$$

$$2y'' + 5y' = sin3x = f_1(x)$$

$$y_1 = Acos3x + Bsin3x$$

$$y'_1 = -3\,Asin3x + 3Bcos3x$$

$$y''_1 = -9Acos3x - 9Bsin3x$$

$$2(-9Acos3x - 9Bsin3x) + 5(-3Asin3x + 3Bcos3x) = sin3x$$

$$\begin{cases}-18A+15B=0\\-15A-18B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{5B}{6}\\-61B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{5}{183}\\B=-\dfrac{2}{61}\end{cases}$$

$$y_1(x) = -\frac{5}{183}cos3x - \frac{2}{61}sin3x$$

$$2y'' + 5y' = -sinx = f_2(x)$$
$$y_2 = Acosx + Bsinx$$
$$y'_2 = -Asinx + Bcosx$$
$$y''_2 = -Acosx - Bsinx$$
$$2\,(-Acosx - Bsinx) + 5\,(-Asinx + Bcosx) = -sinx$$

$$\begin{cases}-2A+5B=0\\-5A-2B=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{5}{29}\\-2B-5A=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{5}{29}\\B=\dfrac{2}{29}\end{cases}$$

$$y_2(x) = \frac{5}{29}cosx + \frac{2}{29}sinx$$

$$Răspuns\text{: } y = C\_1 + C\_2e^{-\frac{5}{2}x} - \frac{5}{183}cos3x - \frac{2}{61}sin3x + \frac{5}{29}cosx + \frac{2}{29}sinx$$

Pentru a soluționa ecuația din exemplul 2, prin metoda interactivă, se utilizează din bara de meniu:

Tools $\rightarrow$ *Assistants* $\rightarrow$ *ODE Analyzer* $\rightarrow$ *Edit* (se introduce ecuația diferențială) $\rightarrow$ *Add* $\rightarrow$ *Done.*

Se alege modalitatea de rezolvare, în dependența de forma în care dorim să obținem soluția (fig. 2):

- *Solve Symbolicaly* – soluție în formă analitică,
- *Solve Numericaly* –soluție în formă numerică pentru careva condiții inițiale.

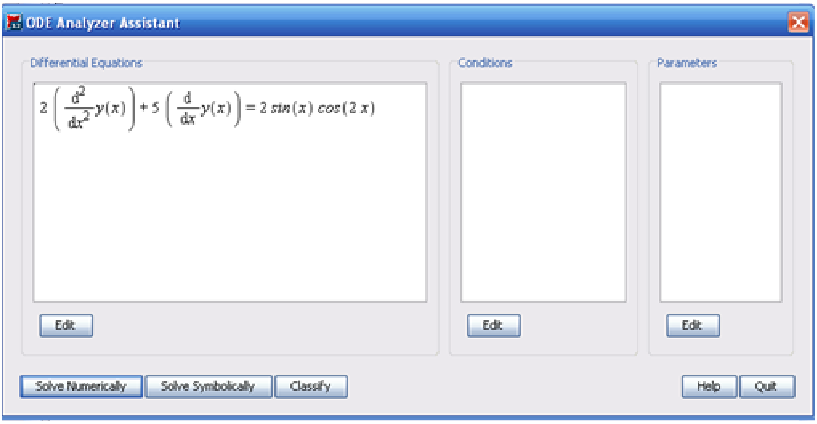

Fig. 2. Fereastra de editare a ecuației diferențiale și a condițiilor inițiale

După ce se selectează modalitatea de rezolvare, de exemplu *Solve Symbolicaly*, se deschide o nouă fereastră, în care este amplasat butonul *Solve* (fig. 3) care are funcția de soluționare, în așa mod obținem soluția generală a ecuației diferențiale.

Observație. Soluția obținută pe calculator este echivalentă cu cea obținută prin metoda standartă.

Pentru a reprezenta graficului soluției, tastăm

Plot Options $\longrightarrow$ *(introducem valori pentru constantele* C_1 și C_2*)* $\longrightarrow$ *Done* $\longrightarrow$ *Plot*

În rezultat, obținem graficul soluției particulare (fig. 3) (pentru valorile constantelor introduse).

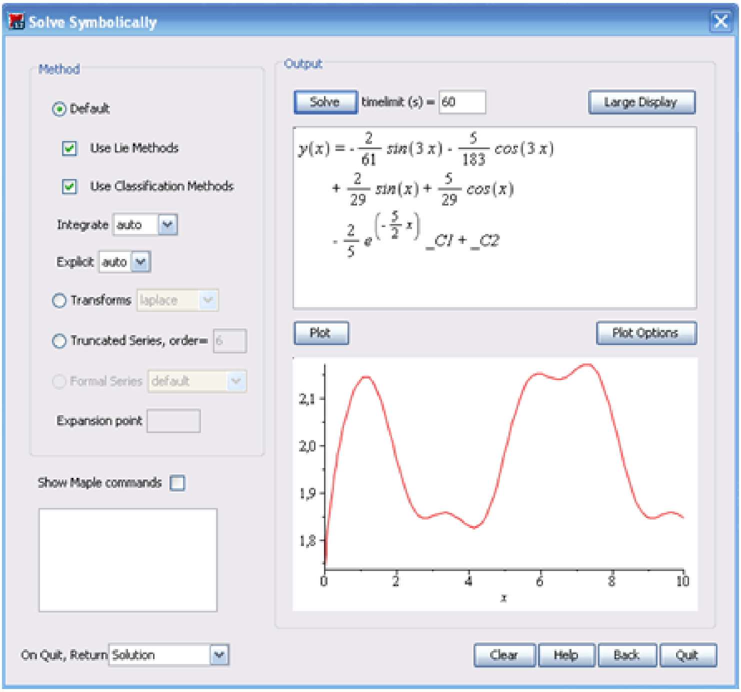

Fig. 3. Soluționarea și reprezentarea graficului unei soluții particulare

Exemplul 3. Rezolvați sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dot{x} = -7 \cdot x + y \\ \dot{y} = -2 \cdot x - 5 \cdot y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 7 - r & 1 \\ -2 & -5 - r \end{vmatrix} = r^2 + 12r + 37$$

$$r^2 + 12r + 37 = 0$$

$$r_{1,2} = +6 \pm i$$

$$\begin{cases}(-7+6-i)k_1+k_2=0\\ -2k_1-(5-(-6+i))k_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-1-i)k_1+k_2=0\\ -2k_1+(1-i)k_2=0\end{cases}$$

$$-2\cdot(-1-i)k_1-2k_2=0$$
$$(-1-i)k_1+\ k_2=0$$
$$k_1=1,\qquad k_2=1+i$$

$$\begin{cases}x=e^{(-6+i)t}\\ y=(1+i)e^{(-6+i)t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=e^{-6t}e^{it}\\ y=(1+i)e^{-6t}e^{it}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=e^{-6t}(\cos(t)+i\sin(t))\\ y=(1+i)e^{-6t}(\cos(t)+i\sin(t))\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=e^{-6t}(\cos(t)+i\sin(t))\\ y=e^{-6t}(\cos(t)-\sin(t)+i(\cos(t)+\sin(t)))\end{cases}$$

Formăm soluția generală a sistemului

$$\begin{cases}x=c_1e^{-6t}\cos(t)+c_2e^{-6t}\sin(t)\\ y=c_1e^{-6t}(\cos(t)-\sin(t))+c_2e^{-6t}(\cos(t)+\sin(t)))\end{cases}$$

Soluționarea sistemelor de ecuații diferențiale în Maple, este analog soluționării ecuațiilor diferențiale (fig. 4).

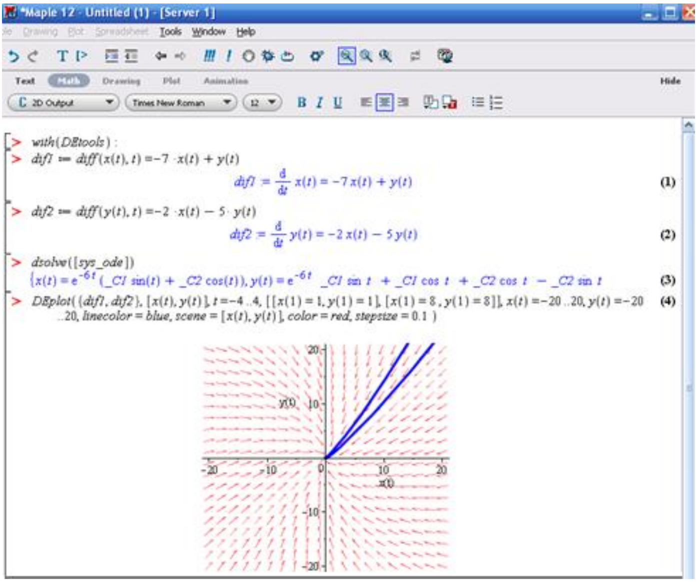

Fig. 4. Soluționarea sistemelor de ecuații diferențiale (exemplul 3)

Bibliografie

1. Stepaniuc, V.V., *Curs de ecuații diferentiale*, Lumina, Chişinău 1970.
2. Ecuații diferențiale de ordinul întîi rezolvabile prin metode elementare http://web.info.uvt.ro/~braescu/courses/EDP_romana.pdf (vizitat 15.02.2016)
3. Maple 12, The Essential Tool for Mathematics and Modeling, User Manual, Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. 2008.

BUCLE MOUFANG

ȚARĂLUNGĂ Boris, dr., conf. univ.

Summary

Is proved that: 1) if the IP loop $(Q,\cdot)$ isotope is the type WIP then, loop $(Q,\cdot)$ is a Moufang loop. 2) if the IP loop $(Q,\cdot)$ isotope is the type WIP_1, then loop $(Q,\cdot)$ is a Moufang loop. 3) if the CI