Exemplul 3. $\frac{4}{397} = \frac{1}{2\cdot397} + \frac{1}{114} + \frac{1}{22629}$.

Bibliografie

1. Guy, R. K., „Egyptian Fractions”. Unsolved Problems in Number Theory. 3rd Edition Springer Verlag, Berlin, New York 2004.
2. Koichi, Yamamoto, On the diofantine equation 4/n=1/x+1/y+1/z. Memoirs of the Faculty of Science.
3. Jamel, Ghannouchi, The Erdos-Strauss conjencture The proof. Bulletin of mathematical Sciences and Applications, 2014.

SERII DE PUTERI. APLICAȚII ALE SERIILOR DE PUTERI

Zinaida GHILAN, dr., conf. univ.

Summary

In this article we present some theorems of power series without being demonstrated. They resolved a number of exercises for the approximate calculation of functions, integrals and differential equations using of power series.

Seriile de puteri reprezintă o extindere a conceptului de funcții polinomiale și, în același timp, o clasă particulară de serii de funcții. De aceea seriile de puteri posedă toate proprietățile seriilor de funcții reale și unele proprietăți speciale care le leagă de funcțiile polinomiale, ca: continuitate, integrabilitate, derivabilitate și sunt funcții de clasă C^∞ pe mulțimea lor de uniformă convergentă.

Definiție. Se numește serie de puteri [1, 2] o serie de forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots. + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

unde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sunt numere numite coeficienții seriei de puteri, iar $x \in \boldsymbol{R}$. Numărul a_n se numește coeficientul termenului de rang n.

Să observăm că mulțimea de convergență a seriei conține cel puțin un punct, și anume punctul x=0, deoarece pentru x= 0 seria este convergentă și are suma a_0 .

Toate rezultatele privind seriile de funcții sunt valabile și pentru seriile de puteri. Datorită caracterului particular a seriilor de puteri, au în plus următoarele proprietăți:

Teorema lui Abel 1.

Dacă seria de puteri este convergentă pentru o valoare $x \neq 0$, atunci ea este absolut convergentă pentru orice valoare x ce satisface condiția $|x| < |x_0|$; Dacă seria de puteri este divergentă pentru o valoare x_1, atunci ea este divergentă pentru orice valoare x ce satisface condiția $|x| > |x_1|$ [1].

Teorema lui Abel ne dă posibilitatea să determinăm structura mulțimii de convergență a unei serii de puteri.

Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ există un număr R (numită raza de convergență a seriei de puteri), unde $0 \leq R \leq +\infty$ astfel încât seria este absolut convergentă pe intervalul $x \in (-R, R)$; și divergentă pentru $x \in (-\infty, R) \cup (R, +\infty)$. Se studiază separat natura seriei pentru x=-R, respectiv, x=R. Dacă R=0, atunci seria este convergentă doar pentru x=0, dacă R$R = +\infty$, atunci seria este absolut convergentă pentru orice $x \in R$.

Numărul R se numește raza de convergență a seriei de puteri, iar intervalul (-R,R) se numește intervalul de convergență. Putem menține că suma unei serii de este o funcție continuă în orice punct interior intervalului de convergență.

Exemplu 1. Să se cerceteze seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$. Are raza de convergență R=1, deci este absolut convergentă pentru $x \in (-1,1)$ și divergentă pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Se studiază separat și pentru x=-1 seria este semiconvergentă, iar pentru x=1 seria este divergentă.

Deoarece în intervalul de convergență $(-R, R)$ seria de puteri este absolut convergentă, raza de convergență R se determină folosind criteriile de convergență ale seriilor cu termini pozitivi .

Teorema 2. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l$, atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, dacă\ 0 < l < +\infty \\ 0, \quad dacă\ l = +\infty \\ \infty, dacă\ l = 0 \end{cases}$$

Remarcă 1. De obicei, în practică se calculează raza de convergență $\mathrm{R} = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$.

Dacă R=0, seria este convergentă numai pentru x=0, dacă $\mathrm{R} = \infty$, seria este convergentă pe toată axa numerică.

Teorema 3. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Dacă $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l_1$, atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l_1}, dacă\ 0 < l_1 \le +\infty \\ 0, \quad dacă\ l_1 = +\infty \\ \infty, dacă\ l_1 = 0 \end{cases}$$

Putem menționa că aceste două teoreme pot fi aplicate în mod direct în cazul când în serie sunt prezente toate puterile lui x. În caz contrar se recomandă să se afle intervalul de convergență aplicând criteriile D'Alembert și Cauchy.

În continuare, vom defini unele teoreme a seriilor de puteri (fără demonstrație) și vom arăta prin exemple, aplicarea cu succes la calculul aproximativ a valorile funcțiilor, integralelor definite și a ecuațiile diferențiale.

Să se calculeze valorile funcțiilor. Fie funcția *f(x)* se dezvoltă într-o serie de puteri

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

,

pe intervalul *(a-R, a+R).* Fie că trebuie să calculăm cu o anumită exactitate δ valoarea funcției $f(x_0)$, unde $x_0 \in (a-R, a+R)$.

Aceasta problemă o putem rezolva substituind suma seriei cu o sumă parțială. În care vom încadra atâția termeni, încât suma termenilor omiși să satisfacă condiția:

$$|f(x_0) - S_n(x_0)| = |R_n(x_0)| < \delta$$

Exemplu 1. Să se calculeze $\sqrt[3]{e}$ cu exactitatea $\delta \leq 0{,}001$.

Rezolvare. Știm că: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, -\infty < x < \infty$.

Punând $x = \frac{1}{3}$, obținem

$$\sqrt[3]{e} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{3^2 \cdot 2!} + \frac{1}{3^3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{1}{n^n \cdot n!} + R_n\left(\frac{1}{3}\right)$$

Restul, în forma lui Lagrange, este $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$

Unde c este situat între x și 0. Pentru x=1/3 avem $R_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^c}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$

Cum $e^c < \sqrt[3]{e} < 2$, putem determina că $R_n\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{2}{(n+1)!3^{n+1}}$

Vom căuta valoare lui n pentru care $\frac{2}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}} \leq 0.001$.

Ne putem convinge că aceasta inegalitate se satisface începând cu n=4. Prin urmare

$$\sqrt[3]{e} \approx 1 + \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{3^2 \cdot 2!} + \frac{1}{3^3 \cdot 3!} + \frac{1}{3^4 \cdot 4!}.$$

Am obținut că $\sqrt[3]{e} \approx 1{,}3951$ cu exactitatea de 0,001.

În continuare, să definim unele teoreme fără demonstrație și să se arate importanța seriile de puteri aplicate cu succes la calculul aproximativ a integralelor definite. Vom formula teorema următoare fără demonstrare [1].

Teorema 3. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu intervalul de convergență (-R,R), R>0. Dacă *x* este un punct din intervalul de convergență, atunci seria de puteri poate fi integrată termen cu termen pe intervalul $[0, x]$. Seria obținută în urma integrării termen cu termen are aceeași rază de convergență ca și seria dată.

Să se demonstreze prin exemplele de mai jos.

Exemplu 2. Să se calculeze integrala

$$\int_a^b e^{-x^2} dx$$

Pentru calcularea acestei integrale dezvoltăm funcția de sub semnul integralei în serie înlocuind în dezvoltarea funcției e^x pe x cu $-x^2$ obținem

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n} + \cdots$$

Integrând ambele părți ale acestei egalități în limitele de la 0 la a obținem

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1! \cdot 3} + \frac{a^5}{2! \cdot 5} - \frac{a^7}{3! \cdot 7} + \cdots$$

Cu ajutorul acestei egalități putem calcula aceasta integrală pentru orice valoarea a lui *a* cu orice grad de precizie.

Exemplu 3. Să se calculeze integrala $\int_0^1 x \cdot sin\sqrt{x} dx$.

Rezolvare. Aceasta integrală nu se exprimă prin funcții elementare. Însă știind că se dezvoltă în serii de puteri funcția *sin x* putem găsi dezvoltarea în serie a funcții de integrat:

$$\sin\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{1!} - \frac{\sqrt{x^3}}{3!} + \frac{\sqrt{x^5}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n-1}{2}}}{(2n-1)!} + \dots$$

Să se dezvolte seria $x \cdot \sin\sqrt{x} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!}$- $\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!}$+$\frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n-1)!} + \dots$

Calculăm integrala $\int_0^1 x \cdot \sin\sqrt{x}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx =$ $\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{1!\cdot\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{3!\cdot\frac{7}{2}} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{5!\cdot\frac{9}{2}} - \dots + \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+3}{2}}}{(2n-1)!(\frac{2n+3}{2})} \right) \Big|_0^1$ $= \frac{2}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{540} - \frac{1}{27720} + \dots = 0{,}354(\pm 10^{-3}).$

$$\int_0^1 x \cdot \sin\sqrt{x}dx = 0{,}354(\pm 10^{-3}).$$

În continuare să se cerceteze una dintre metodele de integrare a ecuațiilor diferențiale sub formă de serie Taylor; suma unui număr finit de termeni ai acestei serii va fi aproximativ egală cu soluția parțială căutată. Mai jos să descriem algoritmul de aflare a soluției ecuației diferențiale de ordinul doi [2, 3].

$$y'' = F(x, y, y')$$

Ce satisface condițiile inițiale

$$(y)_{x=x_0} = y_0 \qquad (y')_{x=x_0} = y'_0$$

Admitem că soluția ecuației y=f (x) există și poate fi reprezentată sub formă de serie Taylor.

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

Să se găsească valorile $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \dots$ adică valorile derivatelor de la soluția parțială pentru $x=x_0$, dar aceasta se poate efectua cu ajutorul ecuației și a condițiilor inițiale. Să se observe că din condițiile inițiale rezultă

$f(x_0) = y_0, \qquad f'(x_0) = y_0;$

Din ecuația inițială să se afle derivatele de ordinul doi.

$f''(x_0) = (y'')_{x=x_0} = F(x_0, y_0, y'_0).$

Să se deriveze ambele părți ale ecuației inițiale în raport cu *x:*

$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')y' + F'_{y'}(x, y, y')y''$ și, să se înlocuiască $x=x_0$ în partea dreaptă, găsim

$f'''(x_0) = (y''')_{x=x_0}$

Să se deriveze ecuația încă odată și să se obțină: $f^{IV}(x_0) = (y^{IV})_{x=x_0}$ etc.

Să se înlocuiască valorile aflate pentru derivate și anume acele valori ale lui x, pentru care seria este convergentă, ea reprezentând soluția ecuației. Procesul de derivare poate fi repetat și pot fi găsite pentru seria Taylor atâtea valori ale derivatelor de ordin superior de câte avem nevoie.

Exemplu 4. Să se afle soluția ecuații [1] $y'' = xy' + 2y$, având condițiile inițiale

$(y)_{x=0} = 1, (y')_{x=0} = 0.$

Rezolvare. Avem $f(0) = y_0 = 1,\ f'(0) = y'_0 = 0.$ Din ecuația dată aflăm $(y'')_{x=0} = f''(0) = 2.$

$y''' = y' + xy'' + 2y', \qquad (y''')_{x=0} = f'''(0) = 0$

$y^{IV} = 3y'' + y'' + xy''', \qquad (y^{IV})_{x=0} = f^{IV}(0) = 8$

$y^{V} = 4y''' + y''' + xy'''', \qquad (y^{V})_{x=0} = f^{V}(0) = 0$

În continuare putem observa că

$y^n = -xy^{(n-1)} + ny^{(n-2)}$

Și deci $(y^n)_{x=0} = ny_0^{(n-2)}$

Rezultă că: $y_0^{(2k-1)} = 0$, iar $y_0^{(2k)} = 2k \cdot y_0^{(2k-2)}$, adică

$y_0^4 = 4 \cdot y_0^2 = 8; y_0^6 = 6 \cdot y_0^4 = 6 \cdot 8 = 48; \dots ; y_0^{2n} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n.$

$y_0^{(2n-1)} = 0.$

Și pentru aceasta înlocuim seria în ecuația diferențială și egalăm coeficienții de pe lângă aceleași puteri ale lui valorile obținute pentru derivate în serie am obținut soluția ecuației x din diferite părți ale ecuații.

$y = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1 \cdot 3} + \frac{x^6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots + \frac{x^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} + \cdots$ Cu ajutorul criteriului lui D'Alembert să găsim intervalul de convergență.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{x^{2n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2n+1} = 0 < 1,$$

Pentru orice $x \in R$.

Lucrarea de fata este un sprijin în studiu a seriilor de puteri. Sunt expuse unele teoreme ale seriilor de puteri fără a fi demonstrate. Să prezentată câteva aplicații la calculul aproximativ a funcțiilor, integralelor și ecuațiilor diferențiale cu ajutorul seriilor de puteri.

Menționăm că:

a) prin derivare sau integrare, termen cu termen, raza de convergență a unei serii de puteri nu se schimbă;

b) o serie de puteri se poate deriva termen cu termen sau se poate integra termen cu termen pe intervalul deschis.

Bibliografie

1. Bivol, L., Bulat, M., *Lecții de analiză matematică,* v. II, Chișinău, 2004.
2. Piskunov, N. S., *Calculul diferențial și integral*, v. II.
3. https://www.google.com/search?q=serii+de+puteri