După cum am menționat mai sus, $tg(< DCE)$ are un caracter decisiv în determinarea corespundenței normelor tehnice a scării respective.

Bibliografie

1. Port, S., Neagu N., *Reprezentarea corpurilor geometrice*, Tipogr. UPS „Ion Creangă”, Chișinău, 2016.
2. Port, S., *Geometrie constructivă,* Tipogr. UPS „Ion Creangă”, Chișinău, 2009, 68 p.
3. Port, S., Covalschi, A., *Geometria proiectivă*, Tipogr. UPS „Ion Creangă”, Chișinău, 2013.

METODE DE REZOLVARE A UNOR ECUAŢII DE GRAD SUPERIOR

Zinaida GHILAN, dr., conf. univ.

Summary

This work proposes examples of a more advanced level of intra- and interdisciplinary integration. Used examples are meant to help the student to grasp the concepts, methods to acquire both new as well as already known aspects of concepts. Solving these exercises also contribute effectively to specific skills training in mathematics.

Matematica a pătruns treptat din ce în ce mai mult în sfera conceptului de cultură generală şi de cultură de specialitate, lăsând puţine sectoare lipsite de prezenţa ei. Această evoluţie se face prin schimbări repetate sau prin salturi. Anume datorită acestor obstacole ne dezvoltăm permanent, acumulăm noi experienţe şi ne transformăm permanent în ceea ce dorim să fim. Trecerea sistematică de la învăţământul informativ la cel formativ va fi posibil numai prin rezolvarea unui număr optimal de probleme şi situaţii- problemă, utilizând diverse strategii în rezolvarea lor, prin însuşirea unor metode specifice anumitor clase de probleme.

Pentru însuşirea mai profundă a materiei de Curriculum la matematică sunt propuse probleme şi exerciţii ce prezintă un grad sporit de dificultate. Ele constituie subiecte pentru examenele de BAC, la olimpiade şi alte concursuri. În cursul de matematică un loc aparte îl ocupă rezolvarea ecuaţiilor lineare. Pentru elevii claselor de liceu nu prezintă dificultăţi de a rezolva ecuaţii de tipul $ax = b$, $ax^2 + bx + c = 0$ în mulţimea numerelor reale. Problema se complică atunci, când la rezolvarea problemelor lineare, elevii trebuie să manifeste intuiţie matematică, ingeniozitate, spirit inventiv, calităţi care trebuie noi profesorii să le dezvoltăm pe parcursul anilor de studiu.

A rezolva o ecuaţie înseamnă a afla toate soluţiile ei. Prin ecuaţie se înţelege egalitatea dintre două expresii ce conţin una sau câteva variabile, care se verifică numai pentru anumite valori ale variabilelor. Domeniul valorilor admisibile (DVA) al ecuaţiei f(x)=g(x) se numeşte partea comună a domeniilor de definiţie al funcţiilor f(x) şi g(x). Dacă D(f) şi D(g) sunt domeniile de definiţie a funcţiilor f(x) şi g(x), atunci domeniul de valori admisibile ale funcţiilor f(x) şi g(x) este intersecţia mulţimii D(f) şi D(g) adică: $D(f) \cap D(g)$.

La rezolvarea ecuaţiilor trebuie să înlocuim ecuaţia iniţială cu alta mai simplă, cea ce nu întotdeauna este posibil. Aceasta poate avea loc în cazul, când se trece la o ecuaţie nouă și se pierd unele soluţii. Important este să nu pierdem soluţii în procesul transformărilor ecuaţiilor obţinute pe parcurs. Ecuaţia nouă poate avea şi alte soluţii (soluţii străine). Soluţiile străine le vom exclude prin verificare. În toate cazurile se verifică aceste soluţii prin substituţia lor în ecuaţia iniţială. Verificarea soluţiilor aflate ale ecuaţiilor poate fi necesară când ambele părţi ale ecuaţiei au fost ridicate la o putere pară, la aducerea la acelaşi numitor, care conţine o variabilă şi la omiterea ei ulterioară, în procesul rezolvării le vom exclude prin verificare: s-au comis unele greşeli, nu s-au deschis corect parantezele, n-au fost efectuate corect operaţiile aritmetice, nu s-a ţinut cont de careva semn etc. În unele cazuri, soluţiile se verifică mai întâi în DVA, apoi cele selectate în ecuaţia iniţială.

Desigur există foarte multe procedee, dar nu le putem descrie în ansamblu. Unele din ele merită totuşi atenţia. Cu atât mai mult că deseori tipul ecuaţiei, forma în care ea este scrisă, nu sugerează ideea despre metoda de rezolvare.

Deseori

În continuare vom prezenta unele metode de rezolvare a ecuaţiilor algebrice.

1.*Ecuaţii de tipul* $x^2+\frac{a^2x^2}{(a+z)^2}=b$. (1)

Observăm că partea stângă a acestei ecuaţii reprezintă o sumă de pătrate, în care ne sugerează ideea că ar fi bine să separăm un pătrat complet al unei sume sau a unei diferenţe. Dacă vom încerca să separăm pătratul unei sume, nu vom obţine o ecuaţie mai simplă. De acea separăm pătratul unei diferenţe. Obţinem ecuaţia.

$$x^2-\frac{2ax^2}{a+x}+\frac{a^2x^2}{(a+z)^2}=b-\frac{2ax^2}{a+x}$$ sau

$$\left(x-\frac{ax}{a+x}\right)^2=b-\frac{2ax^2}{a+x} \qquad (2)$$

Aducând la numitor comun diferenţa dintre paranteze a ecuaţiei (2), obţinem ecuaţia echivalentă cu:

$$\left(\frac{x^2}{a+x}\right)^2=b-\frac{2ax^2}{a+x}\ , \qquad (3)$$

Notăm $\frac{x^2}{a+x}=t$ şi ecuaţia (3) se reduce la ecuaţia pătrată de forma:

$$t^2+2at-b=0 \qquad (4).$$

Să analizăm exemplu: $x^2+\frac{121x^2}{(11+x)^2}=104$.

Scriem ecuaţia sub forma (3) şi obţinem $\left(\frac{x^2}{11+x}\right)^2 = 104 - \frac{2\cdot 11\cdot x^2}{11+x}$.

Efectuăm substituţia $\frac{x^2}{11+x} = t$. Obţinem ecuaţia de gradul doi: $t^2 + 22t - 104 = 0$. Rezolvăm ecuaţia în raport cu t şi cercetăm cazurile obţinute pentru: $t_1 = 4$ şi $t_2 = -26$.

1. $t_1 = 4$; $\frac{x^2}{11+x} = 4$; $x_{1,2} = 2 \pm 4\sqrt{3}$

2. $t_2 = -26$; $\frac{x^2}{11+x} = -26$; $x_{3,4} = -13 \pm \sqrt{117}i$.

Răspuns. $x_{1,2} = 2 \pm 4\sqrt{3}$; $x_{3,4} = -13 \pm \sqrt{117}i$

2. *Ecuaţii de tipul* $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$ (5).

Pentru a rezolva ecuaţia de acest tip, substituim

$$x = t - \frac{a+b}{2}, \qquad (6)$$

şi înlocuim în ecuaţia (5), obţinem ecuaţia

$$\left(t - \frac{b-a}{2}\right)^4 + \left(t + \frac{b-a}{2}\right)^4 = c \qquad (7),$$

care poate fi uşor redusă la o ecuaţie bipătrată.

Considerăm exemplu. Să se rezolve ecuaţia $(x-3)^4 + (x-5)^4 = 82$. Substituim $x = t - \frac{(-3)+(-5)}{2} = t + 4$. Înlocuim în ecuaţia iniţială. Ridicăm la puterea a patra partea stângă, efectuăm operaţiile respective şi obţinem o ecuaţie bipătrată; $t^4 + 6t - 40 = 0$. Rezolvând aceasta ecuaţie, primim:

$t_{1,2} = \pm 2,\ t_{3,4} = \sqrt{10}i.$ Substituim valoarea lui t şi obţinem rădăcinile ecuaţiei.

$$x_1 = 2,\ x_2 = 6,\ x_{3,4} = 4 \pm \sqrt{10}i.$$

Răspuns. $x_1 = 2,\ x_1 = 6,\ x_{3,4} = 4 \pm \sqrt{10}i$.

3) *Ecuaţia de forma* $x = a + b(a + bx)^2,\ a \neq 0,\ b \neq 0$. Fie $y = a + bx^2$ atunci $x = a + by^2$. Aşa dar obţinem sistemul $\begin{cases} x = & a + by^2 \\ y = & a + bx^2 \end{cases}$, scăzând din prima ecuaţie ecuaţia a doua, obţinem $x - y = -b(x - y)(x + y)$. Deci sunt posibile două cazuri:

1) $x = y$ 2) $x + y = -\dfrac{1}{b}$. Luând în consideraţie, ecuaţia $y = a + bx^2$ obţinem următoarea reuniune de ecuaţii: $\left[\begin{array}{l} x = a + bx^2 \\ x + a + bx^2 = -\dfrac{1}{b} \end{array}\right.$. Rezolvând această totalitate, vom obţine rădăcinile ale ecuaţiilor. Astfel $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4ab}}{2b};\ x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4ab}}{2b}$

Exemplu: $x = 3 - 4(3 - 4x^2)^2$. *Rezolvare*: Efectuând operaţiile $y = 3 - 4x^2$, atunci $x = 3 - 4y^2$. Reieşind din teoria descrisă anterior, obţinem o totalitate de ecuaţii: $\left[\begin{array}{l} x = 3 - 4x^2 \\ x + 3 - 4x^2 = \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$. Rezultatul va fi reuniunea de ecuaţii

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 3(-4)}}{2(-4)};\ x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{-3-4\cdot 3(-4)}}{2(-4)};$$

$$x_1=-1;\ x_2=\frac{3}{4};\ x_{3,4}=\frac{1\pm 3\sqrt{5}}{8}.$$

4) În unele cazuri ecuaţia de gradul patru poate fi redusă la o ecuaţie de forma: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+k=0$.

Exemple de rezolvare a ecuaţiilor:

a) $x^4-4x^3-11x^2+12x+9=0.$

Rezolvare. Scriem ecuaţia astfel: $x^2(x^2-4x-3)-3(x^2-4x-3)=5x^2$. Deci $(x^2-4x-3)(x^2-3)=5x^2$. Notăm $x^2-3=t$. Substituim expresia şi obţinem : $t(t-4x)=5x^2, t^2-4xt-5x^2=0.$

Rezolvăm ecuaţia obţinută în raport cu variabila t: $t_1=5x$ şi $t_2=-x$. Cercetăm cazurile obţinute:

1. $t_1=5x$; $x^2-3=t_1$; $x^2-5x-3=0$; $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

2. $t_2=-x$; $x^2-3=t_2$; $x^2+x-3=0$; $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Răspuns: $\left(5\pm\sqrt{37}\right)/2$; $\left(-1\pm\sqrt{13}\right)/2$

b) $(x^2-7x+8)^2=(3x-2)(x^2-x+4)$.

Rezolvare. Notăm $3x-2=u$; iar $x^2-x+4=v$.

Atunci

$$x^2-7x+8=x^2-x+4-6x+4=x^2-x+4-2(3x-2)=v-2u.$$

Înlocuim în ecuaţia iniţială obţinem $(v-2u)^2=uv$. Ridicăm la pătrat expresia din partea stingă $v^2-5uv+4u^2=0$ sau $(v-4u)(v-u)=0$.

Rezolvând aceasta ecuaţie în raport cu variabila v obţinem: $v = 4u$ şi $v = u$.

Cercetăm cazurile:

1. $v = 4u$; $x^2 - x + 4 = 4(3x - 2),\ x^2 - 13x + 12 = 0.\ x_1 = 12;\ x_2 = 1.$

2. $v = u$; $x^2 - x + 4 = 3x - 2,\ x^2 - 4x + 6 = 0.\ x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{2}i.$

Răspuns: $x_1 = 1;\ x_2 = 12.\ x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{2}i.$

c) *Rezolvaţi ecuaţia.* $\dfrac{x^2 - 6x - 9}{x} = \dfrac{x^2 - 4x - 9}{x^2 - 6x - 9}.$

Rezolvare. Scriem ecuaţia astfel $(x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9)$. Notăm $x^2 - 6x - 9 = t$ şi obţinem ecuaţia în raport cu t: $t^2 = x(t + 2x)$. Rezolvăm ecuaţia în raport cu t: $t^2 - xt - 2x^2 = 0.$ Unde t $t_{1,2} = \dfrac{x \pm 3x}{2};\ t_1 = 2x;\ t_2 = -x$.

Cercetăm următoarele cazuri:

1. $t_1 = 2x;$ $x^2 - 6x - 9 = t;$ $x^2 - 6x - 9 = 2x;\ x^2 - 8x - 9 = 0;\ \ x_1 = 9; x_2 = -1;$

2. $t_2 = -x$; $x^2 - 6x - 9 = t;\ x^2 - 6x - 9 = -x;$

Răspuns.-1; 9; $\dfrac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$.

d) De *exemplu ecuaţia* $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 1680.$ Pentru a rezolva aceasta ecuaţie suma termenilor liberi a doi factori este egală cu suma celorlalţi doi, atunci grupându-i şi aplicând o substituţie reuşită, obţinem o ecuaţie pătrată în raport cu variabila nouă.

Rezolvare. Observăm, că -2-3=-1-4. De acea grupăm factorul întâi cu al patrulea şi al doilea cu al treilea: $((x-1)(x-4))((x-2)(x-3)) = 1680$ sau

$\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-5x+6\right)=1680$. Efectuând substituţia $x^2-5x=z$; obţinem $(z+4)(z+6)=1680$. Rezolvăm ecuaţia de gradul doi $z^2+10z-1656=0,\ z_1=36,\ z_1=-46$.

Cercetăm cazurile:

1. $z_1=36,\ x^2-5x=36,\ x^2-5x-36=0,\ x_1=9,\ x_1=-1$

2. $z_2=-46,\ x^2-5x=-46,\ x^2-5x+46=0,\ x_{3,4}=\dfrac{5\pm\sqrt{139}i}{2}$.

Răspuns: -1, 9, $\left(5\pm\sqrt{139}i\right)/2$.

5) *Ecuaţia de forma* $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=0,$ pentru care $a_{n-k}=a_k,\ \forall k,\ 0\le k\le n$ se numeşte simetrică.

Astfel de ecuaţii posedă următoarele proprietăţi.

- ✓ Dacă x_1 este rădăcina unei ecuaţii simetrice, atunci $\dfrac{1}{x_1}$ este de asemenea rădăcina acestei ecuaţii.
- ✓ Orice ecuaţie simetrică de ordin impar admite o rădăcina x=-1;
- ✓ Orice ecuaţie simetrică de ordin par *2k* se reduce la ecuaţiei de gradul *k* cu ajutorul substituţiei $x+\dfrac{1}{x}=y$.

Ridicând ambele părţi ale egalităţii $x+\dfrac{1}{x}=y$ la putere, corespunzător, obţinem următoarele formule ce se aplică la rezolvarea ecuaţiilor :

1. $x+\dfrac{1}{x}=y$. 2. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$.

3. $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$. 4.

$x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-2y^2+2$`etc.

Algoritmul de rezolvare a ecuaţiei de ordin impar. Fie ecuaţia de gradul III $ax^3+bx^2+bx+a=0, a\neq 0$.

Grupăm termenii egal depărtaţi de extremi din partea stângă a ecuaţiei şi obţinem:

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0.$$

În urma unei descompuneri în factori, ecuaţia are forma $(x+1)(a(x^2-x+1)+bx)=0 \Rightarrow (x+1)(ax^2+(b-a)x+1)=0$.

Aşadar, se pune problema de a afla toate valorile necunoscutei care satisfac cel puţin una din aceste ecuaţii. În cazul dat se spune că avem de rezolvat o totalitate de două ecuaţii cu o necunoscută. Ea se notează $\left[\begin{array}{c} x+1=0 \\ ax_2+(b-a)x+1=0 \end{array}\right.$. Observăm că avem rădăcinile

$x_1=-1$, şi $x_{2,3}=\frac{-(b-a)\pm\sqrt{b(b-2a)-3a^2}}{2a}$.

Vom analiza exemplu: $6x^5+11x^4-33x^3-33x^2+11x+6=0.$

Rezolvare. Aceasta este o ecuaţie simetrică de grad impar deci $x=-1$. Împărţind ambele părţi ale ecuaţiei la expresia $x+1,$ obţinem ecuaţia simetrică $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0.$ Evident *x=0* nu este soluţie, deci împărţind ambele părţi la x^2, grupăm termenii astfel $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0.$ Efectuând substituţia de mai sus $x+\frac{1}{x}=y$, obţinem

$6(y^2-2)+5y-38=0,\ 6y^2+5y-50=0,\ y_1=-\dfrac{10}{3},\ y_2=2{,}5.$

revenim la variabila x, obţinem $x_1=-1;\ x_2=\dfrac{1}{2};\ x_3=-3;\ x_4=-\dfrac{1}{3}.$

Să analizăm un caz concret, considerăm ecuaţia: $x^4+2x^3-34x^2+14x+48=0$. Împărţim la x^2. Utilizând notaţiile de mai sus aceasta ecuaţie o putem scrie sub forma $\left(x^2+\dfrac{49}{x^2}\right)+2\left(x+\dfrac{7}{x}\right)-34=0$. Întrucât $x^2+\dfrac{49}{x^2}=\left(x+\dfrac{7}{x}\right)^2-14$.

Ultima ecuaţie ia forma $\left(x^2+\dfrac{49}{x^2}\right)+2\left(x+\dfrac{7}{x}\right)-48=0.$ Substituim $x+\dfrac{7}{x}=t$, Obţinem ecuaţia pătrată $t^2+2t-48=0$, de unde $t_1=6$ şi $t_2=-8.$ Luând în consideraţie substituţia aplicată, rezolvăm ecuaţiile $x+\dfrac{7}{x}=6$ şi $x+\dfrac{7}{x}=-8$. Rădăcinile acestor ecuaţii sunt $x_{1,2}=3\pm\sqrt{2},\ x_3=-7,\ x_4=-1.$

6) Metoda coeficienţilor nedeterminaţi: Fie că în urma unor transformări, dintr-o expresie dată se obţine o altă expresie cu coeficienţi necunoscuţi. În acest caz coeficienţii se notează cu litere şi se consideră ca variabile. Pentru determinarea lor se alcătuieşte un sistem de ecuaţii.

Aplicând aceasta metodă, să analizăm un exemplu concret, rezolvând ecuaţia:

$$x^4-7x^2-2x+2=0.$$

Rezolvare. Să aflăm astfel de numere întregi *a, b, c,* şi *d,* în care să aibă loc egalitatea. $x^4-7x^2-2x+2=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d).$

Din partea dreaptă înmulţim expresiile din paranteze şi făcând reducerea termenilor asemenea, obţine:

$x^4 - 7x^2 - 2x + 2 = x^4 + (a+c)x^3 + (b+d+ac)x^2 + (bc+ad).x + bc$

. Egalăm coeficienţii puterilor x^4, x^3, x^2, x, x^0 cu termenii liberi.

Aceste ecuaţii se scriu astfel:

$x^4 \quad a + c = 0,$

$x^3 \quad b + d + ac = -7,$

$x \quad ad + bc = -2,$

$x^0 \quad bd = 2.$

Din prima ecuaţie avem $a = -c$. Excludem variabila c din ecuaţiile doi şi trei şi obţinem $\begin{cases} b + d - a^2 = -7 \\ a(d-b) = -2 \\ bd = 2 \end{cases}$

Din ultima ecuaţie, observăm că sunt posibile patru cazuri:

$1)\ b=1,\ d=2;\ \ 2)\ b=-1,\ d=-2;\ \ 3)\ b=2,\ d=1;\ \ 4)\ b=-2,\ d=-1.$

Observăm că expresia $d - b$ ea valoarea 1 sau -1 pe când a e valoarea 2 sau -2. Verificăm toate cazurile şi obţinem următoarele soluţii: $\begin{matrix} a) & a = 2, & b = -1, & c = -2, & d = -2; \\ b) & a = -2, & b = 1, & c = 2, & d = -2; \end{matrix}$ care admit doar o singură descompunere: $x^4 - 7x^2 - 2x + 2 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 2)$. Rezolvând aceasta ecuaţie, observăm că are patru rădăcini reale: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}; \quad x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3}.$

În aceasta lucrare se propun un şir de exerciţii, care rar se întâlnesc la lecţii în şcoală, însă pentru cei care se interesează de matematică vor fi de folos. Este imposibil, bineînţeles, să prevedem toate cazurile, care se pot întâlni la efectuarea diferitor rezolvări de ecuaţii, însă cunoaşterea unor metode de rezolvare va ajuta nu numai să rezolvaţi un şir de probleme interesante, ci şi să găsiţi de sine stătător noi metode de rezolvare.

Lucrarea le oferă elevilor pasionaţi de matematică, posibilităţi pentru a-şi extinde cunoştinţele, atât prin unele noţiuni teoretice suplimentare, cât şi prin probleme mai complicate.

Bibliografie

1. Botnaru, D., V., Probleme şi exerciţii de matematică. „Lumina”, Chişinău , 1984.
2. Bivol, L.G., Zambiţchii M.C. şi alţii, Probleme şi exerciţii de matematică pentru abiturienţi, Lumina, Chişinău, 1980.
3. Белоусов, В.Д., Изман, М.С., Солтан, В.П., Чиник, Б.И., Республиканские математические олимпиады, „Штиинца”, Кишинев, 1986.

OPORTUNITĂȚI DE REALIZARE A INTERACTIVITĂȚII ÎN CADRUL DIVERSELOR TIPURI DE STRATEGII DIDACTICE

Ludmila URSU, dr., conf. univ.
Lilia CÎRLAN, doctorandă

Summary

This article presents the results of research opportunities to achieve interactivity in the various types of teaching strategies, specifying the type of strategies informative under the aspects: elements of the strategy; roles of actors in the educational process.

Key concepts: *teaching strategy, interactive training, form of organization, teaching method, actors of the educational process.*

În literatura de specialitate din ultimele decenii se propune o gamă largă de metode și tehnici didactice interactive, în baza cărora pot fi construite diverse strategii didactice. Varietatea mare a acestora impune necesitatea de a le ordona logic, adică de a concepe taxonomii ale strategiilor pasibile de interactivitate, în baza unor criterii reprezentative.

Este de menționat interesul cercetătorilor contemporani pentru problema clasificării strategiilor didactice. Există multiple abordări prin