Bibliografie

1. BERGER, Wilhelm Georg, Dimensiuni modale, Editura muzicală, București, 1979.
2. CONSTANTINESCU, Dan, Studiul proporției în Sonatele pentru pian de Beethoven, Ed. Conservatorul „C. Porumbescu”, București, 1971.
3. LENDVAI, Ernő, Béla Bartók: An Analysis of his music, Kahn & Averill, London, 1971.
4. LENDVAI, Ernö, Béla Bartók: Symmetries of music, An Introduction to Semantics of Music. Kodály Institute, Kecskemét, 1993.
5. LIVIO, Mario, Secțiunea de aur. Povestea lui phi cel mai uimitor număr, Ed. Humanitas, București, 2007.
6. Port, S., Trifan, V., *Secțiunea de aur în natură*, în: Probleme ale Științelor Socioumanistice și Modernizării Învățământului, Materialele Conferinței științifice anuale a profesorilor și cercetătorilor UPS ,,Ion Creangă”, Volumul III, Tipogr. UPS ,,Ion Creangă”, Chișinău, 2015, pp. 276-285.
7. Port, S., Trifan, V., *Secțiunea de aur în artă*, în: Probleme ale Științelor Socioumanistice și Modernizării Învățământului, Materialele Conferinței științifice anuale a profesorilor și cercetătorilor UPS ,,Ion Creangă”, Tipogr. UPS ,,Ion Creangă”, Chișinău, 2016, pp. 254-261.
8. Port, S., Trifan, V., *Istoria matematicii,* Tipogr. UPS ,,Ion Creangă”, Chișinău, 2015, p. 253.

BUCLE DE TIPUL WIP

Boris ŢARĂLUNGĂ, dr., conf. univ.

Summary

In this paper we define WIP^* loops. Is proved that, the left, middle, and right nuclei of a WIP^* coincide. An example of a loop with this property is constructed.

În teoria buclelor sunt intens studiate buclele WIP [1-3]. O buclă $Q(\cdot)$ se numește buclă WIP, dacă pentru orice $x, y \in Q, y \cdot I(x \cdot y) = Ix$. Substituția $Ix = x^{-1}$ se numește automorfism a buclei $Q(\cdot)$, dacă pentru orice

$x, y \in Q, I(x \cdot y) = I(x) \cdot Iy$. Se numește autotopie a buclei $Q(\cdot)$ tripletul

$T = (\alpha, \beta, \gamma)$ ce verifică relația $\alpha x \cdot \beta y = \gamma(xy)$, unde α, β, γ sunt substituții a buclei $Q(\cdot)$, iar

$x, y, z \in Q$. Se numește nucleu la stînga (dreapta, de mijloc) și notate, respectiv, mulțimea

$N_l = \{a: a \cdot xy = ax \cdot y,\ x, y \in Q\}$. $N_r = \{a: x \cdot ya = xy \cdot a,\ x, y \in Q\}$,

$N_m = \{a: xa \cdot y = x \cdot ay, x, y \in Q\}$.

În lucrarea dată se definesc buclele WIP^*. Pentru aceste bucle se arată, că substituția I^5 este un automorfism, se determină care sunt soluțiile ecuațiilor $a \cdot x = b$ si $y \cdot a = b$, se studiază structura autotopiilor, se demonstrează că nuclele la stînga, dreapta și de mijloc a acestei bucle coincid și se construeste un exemplu de buclă WIP^*.

Bucla $Q(\cdot)$se numește bulcă WIP^*,dacă pentru orice $x, y \in Q$, $Ix \cdot I^2(y \cdot x) = I^2 y$. Dacă în bucla $Q(\cdot)$ substituția I este un automorfism, atunci bulca data este o buclă WIP .

Propoziția 1. In bucla $Q(\cdot)$ substitutia I^5 este un automorfism.

Demonstrație. Fie $Q(\cdot)$ *o* bulcă WIP^*, adică se verifică relația $Ix \cdot I^2(y \cdot x) = Iy$ (1). Aplicăm asupra relației (1) din partea stîngă I^2 și obținem $I^2(Ix \cdot I^2(y \cdot x)) = I^4 y$ (2). Înmulțim (2) din partea stîngă cu $I^3(y \cdot x)$. Atunci $I^3(y \cdot x) \cdot I^2(Ix \cdot I^2(y \cdot x)) = I^3(y \cdot x) \cdot I^4 y$ (3). Cum $Q(\cdot)$ este o bulcă WIP^*, rezulta $I^3(y \cdot x) \cdot I^4 y = I^3 y$ (4). Înmulțim (4) din partea stîngă cu I^2 și apoi relația nou obținută cu $I^5 x$ obținem $I^5 x \cdot I^5 y = I^5(x \cdot y)$. Propoziția este demonsrată.

Observație. Dacă aplicăm asupra (4) automorfismul I^5 obținem relația $I^{-2}(y \cdot x) \cdot I^{-1} y = I^{-2} y$, care de asemenea definește bucla WIP^*. În bucla WIP^* au loc relațiile: 1) $I^{-2} L_a I^2 == R^{-1}_{I^{-1}a}$; 2)$I^{-2} L_a^{-1} I^2 = R_{I^{-1}a}$. Aceste relații rezultă din definiția buclei WIP^*.

Propozitia 2. În bucla Q($\cdot$) ecuațiile $a \cdot x = b$ si $y \cdot a = b$ au soluțiile $x = I^2(I^{-2}b \cdot I^{-1}a)$, iar y= $I^{-2}(Ia \cdot I^2 b)$.

Demonstrație. Fie ecuația $a \cdot x = b$ (5). Aplicăm asupra lui (5) substituția I^{-2} și obținem $I^{-2}(a \cdot x) = I^{-2}b$ (6). Înmulțim (6) din dreapta cu $I^{-1}a$. Atunci $I^{-2}(a \cdot x) \cdot I^{-1}a == I^{-2}b \cdot I^{-1}a$ (7). Din (7) rezultă $x = I^2(I^{-2}b \cdot I^{-1}a)$.

Fie acum $y \cdot a = b$ (8). Aplicăm lui (8) substituția I^2 și obținem $I^2(y \cdot a) = I^2 b$ (9). Înmulțim (9) din stîngă cu Ia. Atunci $Ia \cdot I^2(y \cdot a) = Ia \cdot I^2 b$ (10). Din (10) rezultă $y = I^{-2}(Ia \cdot I^2 b)$. Propoziția este demonsrată.

Propoziția 3. Dacă $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ este o autotopie a buclei Q($\cdot$), atunci $T_1 = (I^{-2}\gamma I^2,\ I^{-1}\alpha I, I^{-2}\beta I^2)$ și $T_2 = (\,I\beta I^{-1}, I^2\gamma I^{-2}, I^2\alpha I^{-2})$ sunt autotopii a buclei Q($\cdot$).

Demonstrație. Fie $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ o autotopie a buclei Q($\cdot$). Atunci $\alpha x \cdot \beta y = \gamma(x \cdot y)$ (11). Din (11) rezultă $\beta y = I^2(I^{-2}\gamma(x \cdot y) \cdot I^{-1}\alpha x)$ (12). Punem $x \cdot y = z$. Atunci $y = = I^2(I^{-2}z \cdot I^{-1}x)$. Relația (12) devine $I^{-2}\beta I^2(I^{-2}z \cdot I^{-1}x) = I^{-2}\gamma z \cdot I^{-1}\alpha x$ sau $I^{-2}\beta I^2(z \cdot x) = I^{-2}\gamma I^2 z \cdot I^{-1}\alpha I$, deci $T_1 = (I^{-2}\gamma I^2,\ I^{-1}\alpha I, I^{-2}\beta I^2$. Din (11) avem $\alpha x = I^{-2}(I\beta y \cdot I\gamma(x \cdot y))$. Fie $x \cdot y = z$. Atunci x = $I^{-2}(Iy \cdot I^2 z)$. Substituim și avem $I^2\alpha I^{-2}(\,Iy \cdot I^2 z) = I\beta y \cdot I^2\gamma z$ sau $I^2\alpha I^{-2}(\,y \cdot z) = I\beta I^{-1}y \cdot I^2\gamma I^{-2}z$. Din ultima relație reziultă $T_2 = (\,I\beta I^{-1}, I^2\gamma I^{-2}, I^2\alpha I^{-2})$. Propoziția este demonsrată.

Teoremă. Nucleele la stînga N_l, de mijloc N_m și la dreapta N_r a buclei Q($\cdot$) coincid.

Demonstrație. Fie $a \in N_l$. Atunci $a \cdot xy = ax \cdot y$. (13). Din (13) resultă autotopia

$S = (L_a, 1, L_a)$. După propozitia $S_1 = (I^{-2}L_a I^2, I^{-1}L_a I, 1)$ este o autotopie a buclei Q($\cdot$). Cum în bucla Q($\cdot$) $I^{-2}L_a I^2 = R^{-1}_{I^{-1}a}$ rezultă $R^{-1}_{I^{-1}a}x \cdot I^{-1}L_a I y = xy$ (14). Dacă în (14) $x = 1$, obținem

$L_a I^{-1} L_a I y = y$ sau $I^{-1} L_a I = L_a^{-1}$ (15). Înlocuim (15) în (14) $R_{I^{-1}a}^{-1} x \cdot L_a^{-1} y = xy$ (16). Dacă în (16) $y = a$ obținem $R_{I^{-1}a}^{-1} x = R_a x$. Atunci $R_a x \;\; L_a^{-1} y = xy$. Substituim în ultima relație y prin $L_a y$, atunci $R_a x \;\; y = x \cdot L_a y$ sau $xa \cdot y = x \cdot ay$, deci $a \in N_m$. Astfel

$N_l \subseteq N_m$(17).

Fie acum $a \in N_m$. Atunci $xa \cdot y = x \cdot ay(18)$. Din (17) resultă autotopia $S_2 = (R_a^{-1}, L_a, 1)$. După propoziția 3 , $S_3 = (I L_a I^{-1}, 1,\; I^2 R_a^{-1} I^{-2})$ este o autotopie a buclei Q(·). Cum în bucla Q(·) $I^2 R_a^{-1} I^{-2} = L_{Ia}$ rezultă $I L_a I^{-1} x \cdot y = L_{Ia}(xy)$ (19). Dacă în (19) punem y $= 1$, obținem $I L_a I^{-1} == L_{Ia}$. Atunci $L_{Ia}\, x \cdot y = \; L_{Ia}\,(xy)$ sau $Ia \in N_l$ .Cum nucleele buclei sunt grupuri $a \in N_l$. Astfel $N_m \subseteq N_l$ (21) . Din (17) și (21) rezultă $N_m = N_l$ (22).

Fie $a \in N_m$. Din relatia (18) rezultă autotopia $S_4 = (R_a, L_a^{-1}, 1)$. Atunci după propoziția 3

$S_5 = (1, I^{-1} R_a I, I^{-2} L_a^{-1} I^2)$ este o autotopie a buclei Q(·). În bucla Q(·) are loc relația $I^{-2} L_a^{-1} I^2 == R_{I^{-1}a}$, deci $x \cdot I^{-1} R_a I y = R_{I^{-1}a}(xy)$ (23). Fie în (23) $x = 1$. Atunci $I^{-1} R_a I = R_{I^{-1}a}$. Substitum în (23) $x \cdot R_{I^{-1}a} y = R_{I^{-1}a}(xy)$ sau $x \cdot (y \cdot I^{-1} a) = (x \cdot y) \cdot I^{-1} a)$. Astfel $I^{-1} a \in N_r$. Cum nucleele buclei sunt grupuri $a \in N_r$, deci $N_m \subseteq N_r$ (24)

Fie acum $a \in N_r$. Atunci $x \cdot (ya) = (xy) \cdot a$. Putem scrie autotopia $S_6 = (1, R_a, R_a)$. După propozitia $S_7 = (I R_a I^{-1}, I^2 R_a I^{-2}, 1)$ de asemenea este autotopie. Cum în bucla Q(·) se verifică $I^2 R_a I^{-2} = L_{Ia}^{-1}$ rezultă $I R_a I^{-1} x \cdot I^2 R_a I^{-2} y = xy$ (24) . Dacă în (24) $y = Ia$, atunci $I R_a I^{-1} = R_{Ia}$. Avem $(x \cdot Ia) \cdot y == x \cdot (Ia \cdot y)$, deci $Ia \in N_m$. Cum N_m este un grup, $a \in N_m$, deci $N_r \subseteq N_m$ (25). Din (25) și (24) rezultă $N_m = N_r$ (26). Din (22) și (26) conchidem,că $N_m = N_r = N_l$. Teorema este demonstrată.

Exemplu. Considerăm mulțimea Q $= Z_{10} \times Z_{10} = \{(x,y): x,y \in Z_{10}\}$, unde Z_{10} este inelul caselor de resturi modulo 10. Definim în Q operația "$\cdot$" : $(a,x)\cdot(b,y) = (\,a+b, x+y++ab^2\,)$, $a,b,x,y \in Z_{10}$. Atunci mulțimea Q$(\cdot)$ este o buclă ce verifică relația $Ix \cdot I^2(y\cdot x) = I^2 y$, adică este o bucla WIP^*.

Bibliografie

1. Artzy, R. On loops with special property, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6(1955), pp. 448-453.
2. Mufang, R., Zur Struktur von Alternativ Korpern. *Math. Ann.*1935,110, pp. 416-430.
3. Белоусов, В., *Основы Теории Квазигрупп и Луп*, Издательство «Наука», Москва, 1967, pp. 223.

SIMULAREA APLICAŢIEI PROBABILITĂŢII GEOMETRICE

Natalia NEAGU, lector

Summary

In this article is described a problem that apply the geometric probability. This problem is solved theoretically and also is achieve a simulation for determine the experimental probability in Delphi.

În viaţa de zi cu zi suntem înconjuraţi de o mulţime de probleme din probabilitate, cum ar fi producerea sau nu a unui eveniment, de exemplu căderea precipitaţiilor, etc.

Definiţia clasică a *probabilităţii* unui eveniment reprezintă raportul dintre numărul de cazuri favorabile Nf la numărul total de cazuri posibile Nt

$$\mathrm{P(A)} = \frac{Nf}{Nt}.$$

Geometric, probabilitatea poate fi calculată ca raportul dintre lungimi, arii sau volume, în dependenţă de condiţiile problemei și de modalitatea de reprezentare a cazurilor favorabile și totale.