

## GRUPURI TOPOLOGICE $G^{\boxplus}$

*Boris ȚARĂLUNGĂ, dr., conf. univ.*

### *Summary*

*We study the properties of the topological abelian  $G^{\boxplus}$  group equipped with the finest  $\tau$  - bounded topology and we prove that  $G^{\boxplus}$  is Hausdorff topological groups and  $(G_1 \times G_2)^{\boxplus} \rightarrow G_1^{\boxplus} \times \times G_2^{\boxplus}$ .*

Grupul topologic  $G$  se numește  $\tau$  – mărginit, dacă pentru orice vecinătate  $V$  a elementului neutru  $e$  a grupului  $G$  există o submulțime  $S \subseteq G$  cu  $|S| \leq \tau$ ,  $\tau > \omega$ , încît  $S \cdot V = G$ .

Clasul grupurilor  $\tau$  – mărginite conține clasul grupurilor  $\omega$  – mărginite, a grupurilor separabile și a grupurile precompacte. Grupurile  $\tau$  – mărginite sunt definite și studiate în [1]. Grupurile abeliene echipate cu cea mai fină topologie  $\omega$  – mărginită  $G^{\square}$  au fost studiate în [2, 3,4].

Pentru grupul topologic abelian  $(G, \rho)$  vom considera în  $G$  topologia determinată de familia de morfisme continue a lui  $G$  în grupul topologic  $H$  de ponderea  $\tau$ . Atunci grupul  $G$  cu această topologie se notează cu  $(G, \rho_*)$  sau  $G^*$ .

Este evident, că grupul  $G^*$  este  $\tau$  – mărginit, iar topologia  $\rho_*$  este cea mai fină topologie  $\tau$  – mărginită.

Dacă  $G$  este un grup abelian discret, atunci grupul  $G$  echipat cu cea mai fină topologie  $\tau$  – mărginită se notează cu  $G^{\boxplus}$ .

În articol se studiază proprietățile grupului topologic abelian  $G^{\boxplus}$ . Se demonstrează, că orice grup abelian  $G^{\boxplus}$  este un grup Hausdorff, iar în orice subgrup a grupului  $G^{\boxplus}$  se induce cea mai fină topologie  $\tau$  – mărginită și orice subgrup este un subgrup închis în topologia indusă. Se arată, că cea mai fină topologie  $\tau$  – mărginită se conservă la produse directe finite.

**Propoziția 1.** Fie  $G$  un grup abelian și  $L$  un grup abelian  $\tau$  – mărginit.

i) Aplicația  $\varphi: G^{\boxplus} \rightarrow L$  este continuă dacă și numai dacă aplicația.

$h \circ \varphi: G^{\boxplus} \rightarrow B$  este continuă pentru orice grup  $B$  de ponderea  $\tau$  și pentru orice morfism continuu  $h: L \rightarrow B$ .

ii) Dacă  $\varphi: G \rightarrow L$  este un morfism, atunci  $\varphi: G^{\boxplus} \rightarrow L$  este continuu.

Demonstrație . i) “ $\Rightarrow$ ”. Este evident, deoarece compoziția morfismelor continue este un morfism continuu.

“ $\Leftarrow$ ” Fie  $U$  o submulțime deschisă în  $B$ . Atunci  $C = h^{-1}(U)$  este o submulțime deschisă în  $L$ . Atunci  $\varphi^{-1}(C) = (h \circ \varphi)^{-1}(C)$  este o submulțime deschisă în  $G$  deoarece  $\varphi \circ h: G^{\boxplus} \rightarrow B$  este continuu. Astfel  $\varphi$  este continuu. Atunci aplicația  $\varphi: G^{\boxplus} \rightarrow L$  este continuă. ■

ii) Considerăm un grup topologic  $B$  de ponderea  $\tau$  și compoziția lui  $\varphi$  cu morfismul continuu  $h: L \rightarrow B$  și aplicăm cazul i).

**Propoziția 2.** Fie  $G$  și  $L$  două grupuri abeliene.

a) Aplicația  $\varphi: G^{\boxplus} \rightarrow L^{\boxplus}$  este continuă, dacă și numai dacă pentru orice grup topologic  $B$  cu ponderea  $\tau$  și orice morfism continuu  $h: L \rightarrow B$  aplicația  $h \circ \varphi: G^{\boxplus} \rightarrow B$  este continuă.

b) Dacă  $\varphi: G \rightarrow L$  este un morfism, atunci  $\varphi: G^{\boxplus} \rightarrow L^{\boxplus}$  este continuu.

c) Dacă  $\varphi: G \rightarrow L$  un epimorfism, atunci  $\varphi: G^{\boxplus} \rightarrow L^{\boxplus}$  este deschis.

Demonstrație. Afirmațiile a) și b) rezultă din i) și ii) din propoziția 1.

Demonstrăm c). Fie  $S = \text{Ker}\varphi \subseteq G$ . Considerăm aplicația  $\pi: G^{\boxplus} \rightarrow G^{\boxplus}/S^{\boxplus}$  și isomorfismul

$\beta: G^{\boxplus}/S^{\boxplus} \rightarrow L^{\boxplus}$ . Atunci  $\varphi = \beta \circ \pi$ . Cum  $\varphi$  este continuu (punctul b) și  $\pi$  este deschis rezultă  $\beta$  este continuu. Grupul  $G^{\boxplus}/S^{\boxplus}$  este  $\tau$  – mărginit, ca imagine epimorfică a grupului  $\tau$  – mărginit  $G^{\boxplus}$ . Morfismul  $\beta^{-1}: L^{\boxplus} \rightarrow G^{\boxplus}/S^{\boxplus}$  este continuu după

$(G, \mu) \in K^*$ , deci  $\varphi$  este un morfism continuu, adică  $\mu \subset \subset \rho$ . Astfel  $\mu = \rho$ . ■

**Propoziția 5.** Fie  $L$  un subgrup a grupului abelian  $G$ . Atunci

- 1)  $L^{\boxplus}$  este un subgrup topologic a grupului  $G^{\boxplus}$ ;
- 2)  $G^{\boxplus}/L^{\boxplus}$  este topologic izomorf grupului  $(G/L)^{\boxplus}$ .

**Demonstrație.** 1) Fie  $\varphi: L \rightarrow D$ , unde  $D$  este un grup divizibil discret abelian cu  $|D| \leq \tau$ . Cum  $D$  este divizibil, după propoziția 17 [6, pag. 21], rezultă că  $\varphi$  se extinde la morfismul  $\phi: G \rightarrow D$ . După teorema 4  $\phi$  este continuu, atunci și  $\phi|_L = \varphi$  este continuu.

2) Cum  $G^{\boxplus}$  este  $\tau$ -mărginit, atunci și  $G^{\boxplus}/L^{\boxplus}$  este  $\tau$ -mărginit.

Considerăm morfismul  $\beta: G^{\boxplus}/L^{\boxplus} \rightarrow D$ . Notăm cu  $\gamma$  morfismul natural de la  $G^{\boxplus}$  la  $G^{\boxplus}/L^{\boxplus}$ . După propoziția 2 morfismul natural  $\gamma$  este deschis. Atunci morfismul  $\beta \circ \gamma$  este continuu. După propoziția 6 [5, pag. 51]  $\beta$  este continuu. Conform teoremei 4 topologia grupului  $G^{\boxplus}/L^{\boxplus}$  coincide cu cea mai fină topologie  $\tau$ -mărginită. ■

**Propoziția 6.** Fie  $G$  un grup abelian. Atunci grupul  $G^{\boxplus}$  este un grup Hausdorff. În particular, orice subgrup a lui  $G^{\boxplus}$  este închis.

**Demonstrație.** Considerăm aplicația identică  $i: G^{\boxplus} \rightarrow G^{\boxplus}$ ,  $i(x) = x$  pentru orice  $x$  din  $G$ . Aplicația dată este o aplicație continuă. Cum  $G^{\boxplus}$  este un grup Hausdorff, atunci și grupul  $G^{\boxplus}$  este un grup Hausdorff. Cum orice subgrup în  $G^{\boxplus}$  este închis, atunci și orice subgrup în  $G^{\boxplus}$  este închis. ■

**Propoziția 7.** Fie  $G_1 \rightarrow G_2$  două grupuri discrete abeliene. Atunci  $(G_1 \times G_2)^{\boxplus} = G_1^{\boxplus} \times G_2^{\boxplus}$ .

**Demonstrație.** Afirmăm, ca aplicația  $id: (G_1 \times G_2)^{\boxplus} \rightarrow G_1^{\boxplus} \times G_2^{\boxplus}$ ,  $id(a, b) = (a, b)$ ,  $a \in G_1, b \in G_2$  este un izomorfism topologic.

Considerăm proiecțiile naturale:  $pr_i: G_1 \times G_2 \rightarrow G_i, i = 1, 2$ . După propoziția 2 proiecțiile  $pr_i: (G_1 \times G_2)^{\boxplus} \rightarrow G_i^{\boxplus}, i = 1, 2$  sunt

continue. Atunci produsul diagonal  $id = (pr_1, pr_2): (G_1 \times G_2)^{\boxplus} \rightarrow G_1^{\boxplus} \times G_2^{\boxplus}$  este continuu.

Fie acum  $D$  un grup divizibil discret abelian cu  $|D| \leq \tau$ . Să arătăm, că orice morfism  $f: (G_1 \times G_2)^{\boxplus} \rightarrow D$  este continuu. Considerăm  $\delta_i: G_i \rightarrow G_1 \times G_2$  scufundările canonice  $i = 1, 2$ . Notăm  $f_i = f \circ \delta_i$ ,  $i = 1, 2$ . Atunci  $f_i: G_i^{\boxplus} \rightarrow D$  sunt continue. Aplicația  $g: (G_1 \times G_2)^{\boxplus} \rightarrow D$ , definită cu  $g(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$  pentru orice  $(a, b) \in G_1 \times G_2$  este continuu. Observăm, că  $f$  coincide cu  $g$ , deoarece  $G_1, G_2$  sunt grupuri abeliene. ■

### Bibliografia

1. Țarălungă, B., Grupuri topologice real compacte. Probleme ale științelor socio-umane și modernizării învățămîntului, Ministerul Educației al Republicii Moldova, UPS „Ion Creangă”, Conferința de totalizare a muncii științifice și științifico –didactice a corpului profesoral pentru anul 2012, Vol.I, p.387-389, Chișinău, 2012.
2. Țarălungă, B., About Some Properties of the Group  $G^{\square}$ . The 22<sup>nd</sup> Conference on Applied and Industrial Mathematics, CAIM 2014, 18-21 september 2014 Book of Abstracts, p.59, Bacău, Romania.
3. Bourbachi, N., Obscaia topologhia. Osnvnie structuri, Nauca, M., 1969.
4. Lorenzo de Leo, Weak and strong topologies in topological Abelian groups. Memoria para optar al grado de doctor, Madrid, 2009.
5. Morris, S., Dvoistvennosti Pontreghina i stroenie localino compactnih abelevih grup, Mir, M., 1980.
6. Tkachenko, M., Introduction to topological groups, Topol. Appl. no.3 (1998), 179-231.