SOLUȚIONAREA UNOR PROBLEME DIN TEORIA FUNCȚIILOR DE VARIABILĂ COMPLEXĂ ÎN MAPLE

Victor PRICOP, dr.

Summary

This paper talks about the usage of technical resources in the teaching process using the computing software Maple which are not only computing environments but also environments training. The author relates how Maple can be used in solving of some problems from the theory *of* functions *of a* complex variable, in special some application of the residues theorem.

Introducere

În acest articol mă voi referi la o temă din cursul *Teoria funcțiilor de variabilă complexă*, şi anume, *teoria reziduurilor şi aplicații* [1], [2], [3], [6].

Fie $f : D \to E,\ E$ o mulțime deschisă din C,, $D \subset$ C. Dacă z_0 este un punct singular izolat al funcției f, atunci există o coroană circular cu centrul în z_0, $0 < |z - z_0| < r$ în care funcția f este olomorfă, ceea ce înseamnă că poate fi dezvoltată în serie Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Definiție. *Punctul* z_0 *se numeşte punct ordinar dacă seria Laurent este serie Taylor* (*nu are termeni cu puteri negative ale lui* $(z - z_0)$), *punct singular esențial izolat dacă partea principală are un număr infinit de termeni şi pol de ordin* k *dacă partea principală are un număr finit de termeni*, *primul coeficient nenul fiind* c_{-k}, *adică* $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ c_{-k} \neq 0.$

Definiție. *Se numeşte reziduul funcției în punctul* z_0 *şi se notează* $\operatorname{Re} z(f, z_0)$ *numărul definit de relația*: $\operatorname{Re} z(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz,$ *unde* Γ *este un cerc cu centrul în* z_0 *situat în coroana circulară de rază* $\rho,\ 0 < \rho < r,$ *parcurs în sens pozitiv*.

Teoremă. *Fie* $f : D \to C$ *o funcție olomorfă pe D, cu excepția punctului singular izolat* z_0, *atunci calculul reziduului funcției f în punctul* z_0 *se poate face astfel*:

1) $\operatorname{Re} z(f, z_0) = c_{-1},$ *unde* c_{-1} *este coeficientul lui* $\frac{1}{z - z_0}$ *din dezvoltarea în serie Laurent a funcției f pe* $0 < |z - z_0| < r.$

2) $\operatorname{Re} z(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z \to z_0}\left[(z - z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)},$ *dacă* $z = z_0$ *este un pol al funcției f şi k este ordinul său de multiplicitate* ($f^{(0)}$=*f* *şi* 0!=1).

3) $\operatorname{Re} z(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)},$ *dacă* z_0 *este un pol al funcției f şi f se poate scrie ca un cât de două funcții* $f = g / h,\ g(z_0) \neq 0.$

În situația punctului ∞, *f* este olomorfă pe exteriorul unui disc de rază oricât de mare. Notăm cu Γ_R frontiera discului de rază *R* oricât de mare, cu centrul în origine, $\Delta(O, R)$. Orientarea acestei frontiere se face de aşa manieră încât parcurgând-o, exteriorul discului rămâne în stânga, adică invers decât orientarea normală, motiv pentru care se notează cu Γ_R^-.

Definiție. *Se numeşte reziduul funcției f în punctul* ∞ *şi se notează cu* $\operatorname{Re} z(f, \infty)$ *coeficientul lui* z^{-1} *din dezvoltarea în serie*

Laurent a funcției f în vecinătatea punctului de la infinit, luat cu semn schimbat $-c_{-1}$.

O altă definiție: $\operatorname{Re} z(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^-} f(z)dz$ sau $\operatorname{Re} z(f, z_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} f(z)dz.$

Transformarea $\xi = \frac{1}{z}$ duce exteriorul discului de rază R în interiorul discului de rază $\frac{1}{R}$, ambele centrate în 0. De asemenea, $\xi = \frac{1}{z}$ duce punctul z=0 în punctul ∞ şi invers. Calculul reziduului în punctul de la infinit al lui $f(z)$ se reduce la calculul reziduului în punctul $\xi = 0$ al funcției $g(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Teorema reziduurilor. *Fie* $f : D \to \mathrm{C}$ *şi* Γ *o curbă simplă închisă, netedă sau netedă pe porțiuni, inclusă în întregime în D. Dacă f este olomorfă pe D, cu excepția unui număr finit de puncte singulare izolate* $a_1, a_2, ..., a_n$ *situate în domeniul* $\Delta \subset D$, Δ *fiind delimitat de frontiera* Γ *care nu trece prin nici unul din aceste puncte, atunci*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z(f, a_k).$$

Observație. 1. *Teorema reziduurilor prezintă mare importanță deoarece reduce calculul unor integrale la calculul unor reziduuri, care de cele mai multe ori nu prezintă dificultăți.* 2. *În cazul când numărul punctelor singulare izolate ale funcției f este foarte mare, aplicarea teoremei reziduurilor poate conduce la* *calcule anevoioase. În această situație se poate calcula reziduul funcției f în punctul ∞.*

Consecință. *Dacă f are în tot planul complex numai un număr finit de puncte singulare izolate, atunci suma tuturor reziduurilor acestei funcții este nulă* $\operatorname{Re} z(f,\infty)+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} z(f,a_k)=0.$

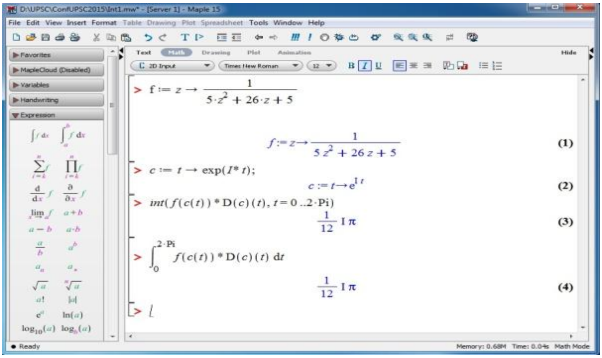
Aplicații ale teoremei reziduurilor la calculul integralelor

Exemplu. Să se calculeze integrala $\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{5z^2+26z+5}.$

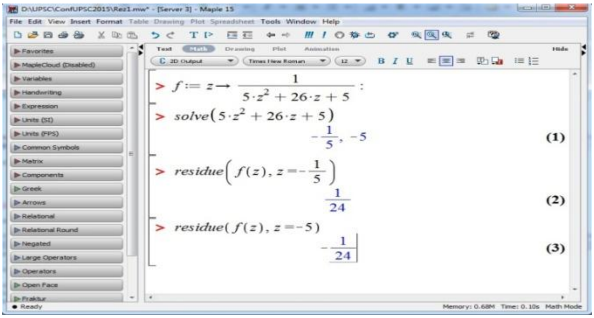
Rădăcinile numitorului fracției sunt $z_1=-5,$, $z_2=-\frac{1}{5}.$ A doua rădăcină este situată în interiorul cercului unitate şi reziduul corespunzător este $\operatorname{Re} z\left(\frac{1}{5z^2+26z+5},-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{10z+26}\Big|_{z=-1/5}=\frac{1}{24}.$

Aplicând teorema reziduurilor obținem $\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{5z^2+26z+5}=2\pi i\frac{1}{24}=\frac{\pi i}{12}.$

Pentru a calcula această integrală în Maple vom utiliza formula $\int\limits_{\gamma} f(z)dz=\int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ [2].



La calculul reziduului în Maple se utilizează comanda *residue*(*f*, *x*=*a*).



Calculul integralelor de forma $I=\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx$ [4]. Se efectuează schimbarea de variabilă $z=e^{ix}=\cos x+i\sin x$. Deoarece $\arg(z)=x\in[0,2\pi]$, numărul complex z parcurge cercul unitate. Avem $dz=i\cdot e^{ix}dx$, de unde $dx=-\frac{i\cdot dz}{z}$, $\cos x=\frac{z^2+1}{2z}$, $\sin x=\frac{z^2-1}{2iz}$, deci

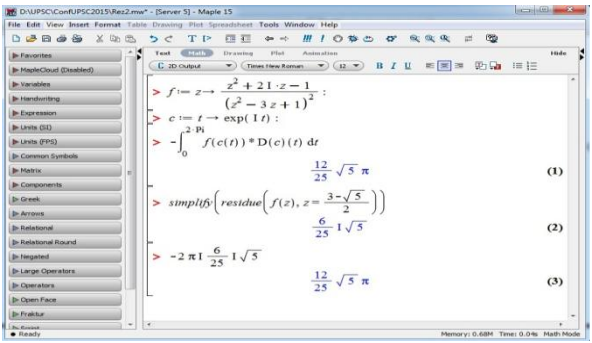
$$I=-i\int_{|z|=1}\frac{1}{z}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)dz.$$

Exemplu. Să se calculeze integrala $I=\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin x}{(3-2\cos x)^2}dx.$

Înlocuind dx, $\cos x$, $\sin x$ primim

$$I=-i\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\frac{1+\frac{z^2-1}{2iz}}{\left(3-2\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}dz=-i\int_{|z|=1}\frac{z^2+2iz-1}{(z^2-3z+1)^2}dz.$$

Există doi poli (dubli) $z_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ cu $|z_1|>1$ şi $z_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ cu $|z_2|<1$. Atunci $I=-2\pi i\operatorname{Re}z(f,z_2)=\frac{12}{25}\sqrt{5}\pi,$ unde $f(z)=\frac{z^2+2iz-1}{(z^2-3z+1)^2}.$

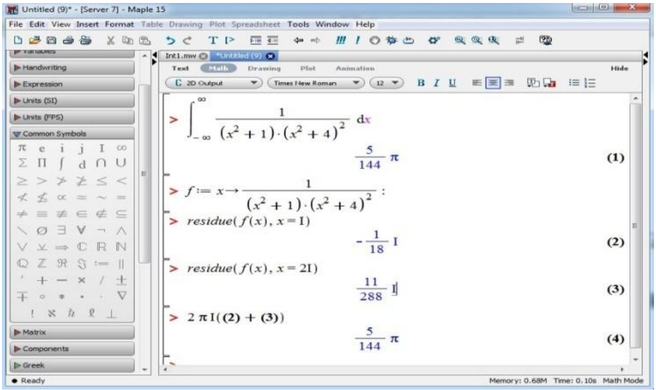


Calculul integralelor de forma $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{\operatorname{Im}z_k>0}\operatorname{Re}z(f,z_k),$ unde $P(x)$ şi $Q(x)$ sunt două polinoame care îndeplinesc condițiile: $Q(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathrm{R}$, $P(x)$ şi $Q(x)$

sunt prime între ele, iar între gradele celor două polinoame există relația *grad* $P(x)+2 \leq$ *grad* $Q(x)$ [5].

Exemplu. Să se calculeze integrala $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$.

Avem $I = 2\pi i[\operatorname{Re} z(f, i) + \operatorname{Re} z(f, 2i)] = 2\pi i\left[\frac{-i}{18} + \frac{11i}{288}\right] = \frac{5\pi}{144}$.



Bibliografie

1. Boboc, N., *Funcții complexe*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.
2. Gaşpar, D., Suciu, N., *Analiza complexă*, Ed. Academiei Române, Bucureşti, 1999.
3. Halanay, A., *Elemente de analiză complexă*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 1999.
4. Lavrentiev, M., Şabat, B., *Metodele teoriei funcțiilor de variabilă complexă*, Ed. Nauka, Moscova, 1965, (în rusă).
5. Mayer, O., *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, Vol.1, Ed. Academiei Române, Bucureşti, 1981.
6. Privalov, I., *Introducere în teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, Ed. Lumina, Chişinău, 1989.