

interlocutori activi, a-i determina pe studenți să urmărească cu interes și să manifeste o atitudine activă în cursul ascultării constituie un indicator al competențelor pedagogice a cadrului didactic.

Importante sunt rezultatele formative ale procesului educațional care se materializează în competențele achiziționate de studenți – competențe cognitive, abilități și deprinderi, convingeri, atitudini, valori, responsabilități. Toate acestea – în spiritul adevărului, care este temelia educației și a dezvoltării spiritului creativ și critic.

### **Bibliografie**

1. Botezatu, P., Adevărul despre adevăr, Ed. Junimea, Iași, 1981.
2. Botezatu, P., Constituirea ilogicității, București, 1992.
3. Dumbraveanu, R., Pâslaru, Vl., Cabac, V., Competențe ale pedagogilor, Interpretări, Chișinău, 2014.
4. Enescu, G., Tratat de logică, Ed. Lider, București, 2007.
5. Ioan, P., Orizonturi logice, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1995.
6. Vianu, T., Filosofia culturii și teoria valorilor, Nemira, 1998.

## **SOLUȚIONAREA INEGALITĂȚILOR PRIN DIFERENȚIERE**

*Zinaida GHILAN, dr., conf. univ.*

### **Summary**

*In this paper includes the study of inequalities with one variable. On the basis of differential calculus theorems are demonstrated a number of inequalities.*

Rezolvarea multor probleme practice se reduce deseori la determinarea inegalităților. În studiul variației unei funcții este important să cunoaștem în ce condiții este constantă sau monotonă pe un interval dat. În multe cazuri este comod să aplicăm proprietatea

funcțiilor derivabile: fie  $f : I \rightarrow R$  ( $I \subseteq R$ ), o funcție derivabilă pe intervalul  $I$  și  $x_0 \in I$  ( $x_0$  - punct interior a lui  $I$ ), atunci creșterea  $\Delta f(x_0)$  unei funcții  $f$  derivabile, într-un punct  $x_0$  se exprimă ca suma a doi termeni: termenul  $f'(x_0) \cdot \Delta x$  care este direct proporțional cu creșterea argumentului și termenul  $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ , unde  $\alpha(\Delta x)$  este un infinit mic. Astfel diferențiala funcției în punctul  $x_0$  este definită ca  $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$  pentru orice  $x$  de pe acest interval  $I$ . Pe baza unor teoreme de calcul diferențial se bazează studiul inegalităților cu o singură variabilă, și vor prezentate în lucrare, fără a fi demonstrate.

*Teorema lui Ferma.* Dacă funcția  $f(x)$  definită într-o vecinătate a punctului  $x_0$  are în acest punct valori nepozitive (nenegative) și în acest punct există derivata funcției, atunci  $f'(x) = 0$ .

*Teorema lui Rolle.* Dacă funcția  $f(x)$  este continuă pe  $[a, b]$ , derivabilă în toate punctele interioare ale segmentului și se anulează în extremitățile acestui segment  $f(a) = f(b)$ , atunci există cel puțin un punct intermediar  $x = c$ ,  $a < c < b$ , în care derivata  $f'(c) = 0$ .

*Teorema lui Lagrange.* Admitem că funcția  $f(x)$  este continuă pe segmentul  $[a, b]$ , și derivabilă în toate punctele interioare ale acestui segment. Atunci între orice două puncte  $a$  și  $b$  ale acestui interval există un punct  $c$  pentru care: 
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

*Teorema de monotonie:* a) dacă funcția  $f(x)$  are derivată pozitivă în fiecare punct al intervalului  $I$ , atunci ea crește pe acest interval;

b) dacă funcția  $f(x)$  are derivată negativă în fiecare punct al intervalului  $I$ , atunci ea descreește pe acest interval.

Admitem că luăm două puncte arbitrare  $x_1$  și  $x_2$  pe intervalul  $I$  și că  $x_2 > x_1$ . atunci conform teoremei lui Lagrange, între aceste

puncte se va găsi un punct  $c$  astfel încât  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ ,  $x_1 < c < x_2$ , unde  $c \in (x_1, x_2)$ .

Întrucât  $f'(c) > 0$  și  $x_2 > x_1$ , obținem că  $f(x_2) > f(x_1)$ , ceea ce înseamnă că funcția crește pe intervalul  $I$ .

Însă, dacă  $f'(c) < 0$  și  $x_2 > x_1$  obținem că  $f(x_2) < f(x_1)$ , înseamnă că funcția descrește pe intervalul  $I$ ;

c) dacă funcția  $f(x)$  este derivabilă pe segmentul  $[a, b]$  crescătoare (descrescătoare), atunci derivata ei pe segmentul  $[a, b]$  este nenegativă (nepozitivă) adică  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ).

*Teorema.* Fie funcțiile  $y=f(x)$  și  $y=g(x)$  continue pe segmentul  $[a, b]$  și în fiecare punct de pe acest interval există derivata funcțiilor  $f'(x)$  și  $g'(x)$ , unde  $f'(x) < g'(x)$  pentru orice  $x \in (a; b)$ , iar  $f(a) \leq g(a)$ , atunci pentru fiecare punct de pe acest  $x \in (a; b)$  are loc inegalitatea  $f(x) < g(x)$ .

Remarcă: în baza acestei teoreme, pentru a demonstra inegalitatea  $f(x) \geq 0$  pentru  $x \geq 0$  este necesar să dovedim că  $f(0) \geq 0$  și  $f'(x) \geq 0$  pentru  $x \geq 0$ , iar pentru inecuația  $f'(x) \geq 0$  pentru  $x \geq 0$  vom utiliza derivata a doua a funcției  $f''(x) \geq 0$  pentru  $x \geq 0$  etc.

În demonstrațiile următoare vom aplica unele consecințe ale teoremei lui Lagrange, și anume: Fie  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = 0$ . Dacă  $f'(x) > 0 \Rightarrow f$  crescătoare și cum  $x > a$ , aplicând definiția funcțiilor monoton crescătoare, obținem  $f(x) > f(a) = 0$ , deci  $f(x) > 0$ .

Dacă  $f'(x) < 0 \Rightarrow f$  descrescătoare și cum  $x > a$ , aplicând definiția funcțiilor monoton descrescătoare, obținem

$f(x) < f(a) = 0$ , deci  $f(x) < 0$ . Analog se demonstrează și pentru  $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Evident, se poate face o generalizare a acestei proprietăți pentru o funcție derivabilă de  $n$ -ori, cu derivate continue. Fie  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  și

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f^{(n-1)}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f^{(n-2)}(x) = \dots = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(a) = 0. \text{ Deci}$$

$f^{(n)}(x) > 0$ , atunci conform teoremei lui Lagrange,  $f^{(n-1)}(x)$  este o funcție crescătoare și cum  $x > a$ , aplicând definiția funcțiilor monoton crescătoare, obținem

$$f^{(n-1)}(x) > f^{(n-1)}(a) = 0 \Rightarrow f^{(n-1)}(x) > 0 \Rightarrow f^{(n-2)}(x) \text{ este}$$

crescătoare. Continuând procedeul, obținem că  $f'(x) > 0 \Rightarrow f$  crescătoare și cum  $x > a \Rightarrow f(x) > f(a) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$ . Analog pentru cazul  $f^{(n)}(x) < 0$  și pentru  $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$  cu  $f^{(n)}(x) > 0$  și respectiv  $f^{(n)}(x) < 0$ .

Pentru rezolvarea inegalităților  $f' > 0$  ( $f' \geq 0$ ) și  $f' < 0$  ( $f' \leq 0$ ) este comod să ne folosim și de următoarea metodă: punctele în care derivata este egală cu zero sau nu există, în domeniul de definiție al funcției se împarte în intervale și în fiecare din aceste intervale derivata  $f'(x)$  își păstrează semnul constant. El poate fi determinat, calculând valoarea derivatei funcției într-un punct oarecare a intervalului. În continuare vom prezenta unele exemple de demonstrare a inegalităților.

1. **Demonstrați** inegalitatea  $\ln(1+x) \leq x$ , pentru  $x \geq 0$ .

*Rezolvare*

Scriem funcția  $f = x - \ln(1+x)$  pe  $[0; +\infty)$ . Fie funcția  $f(x)$  este continuă pe domeniul de definiție  $D_f$  pentru orice  $x \in [0; +\infty)$ .

Derivata funcției  $f'(x) = \frac{x}{1+x}$ . Dacă derivata funcției  $f'(x) > 0$  pe intervalul  $x \in \mathbb{Q}; +\infty$ , funcția este crescătoare pe acest interval și  $f(x) \geq f(0)$ . Cea ce confirmă că inegalitatea este adevărată.

2. **Demonstrați** inegalitatea  $\frac{tgx}{tgy} < \frac{x}{y}$ ,  $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ .

*Rezolvare*

Pentru a demonstra inegalitatea că  $\frac{tgx}{x} < \frac{tgy}{y}$ ,  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ .

Fie funcția  $f(x) = \frac{tgx}{x}$  pe intervalul  $(0; \frac{\pi}{2})$ . Să demonstrăm că aceasta funcție este crescătoare. Aflăm derivata:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - tgx}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}.$$

Funcția  $x^2 \cos^2 x > 0$  - crescătoare. Vom demonstra că și funcția  $g(x) = x - \sin x \cos x$  este de ase menea crescătoare pe intervalul  $(0; \frac{\pi}{2})$ . Derivăm aceasta funcție și obținem  $g'(x) = 1 - \cos 2x$ ,

unde  $g'(x) > 0$ , pentru  $x \in (0; \frac{\pi}{2})$  și deci  $g(0) = 0$ , înseamnă că și  $g(x) > 0$ , rezultă că  $f'(x) > 0$  și  $f(x)$  este o funcție crescătoare pe acest interval. Inegalitatea este adevărată.

3. **Demonstrați** inegalitatea  $\arcsin x > x + \frac{x^2}{6}$  pentru

$x \in (0; 1)$ .

*Rezolvare*

Fie funcția  $f : (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arcsin x - x - \frac{x^2}{6}$ ,  $f(0)=0$ .

Calculăm derivata funcției  $f'(x) = \left( \arcsin x - x - \frac{x^2}{6} \right)'$  de unde

$$f'(x) = \frac{2 - (2 + x^2)\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}. \quad \text{Notăm } g(x) : (0; 1) \rightarrow \mathbb{R},$$

$g(x) = 2 - (2 + x^2)\sqrt{1-x^2}$ , cu  $g(0)=0$ . aflăm derivata funcției

$$g'(x) = \left( -(2 + x^2)\sqrt{1-x^2} \right)' \quad \text{și} \quad g'(x) = \frac{4x^3}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{cum}$$

$g'(x) > 0 \Rightarrow g$  este o funcție strict crescătoare și cum  $x > 0$ , aplicând definiția funcțiilor monoton strict crescătoare, obținem  $g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow g(x) > 0$ . Derivata funcției

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{1-x^2}} > 0 \Rightarrow f \text{ este o funcție strict crescătoare și cum}$$

$x > 0$ , aplicând definiția funcțiilor monoton strict crescătoare obținem  $f(x) > f(0) = 0$ ,  $f(x) > 0$  adică  $\arcsin x > x + \frac{x^2}{6}$ .

**4. Demonstrați** inegalitatea  $e^x \geq 1 + x$  pentru orice  $x$ .

*Rezolvare*

Considerăm funcția  $f(x) = e^x \geq 1 + x$ . Funcția  $f$  este derivabilă și  $f'(x) = e^x - 1$ .

Deoarece  $f'(x) > 0$  pentru  $x > 0$  rezultă că  $f(x) > f(0) = 0$  pentru  $x > 0$ .

Deoarece  $f'(x) < 0$  pentru  $x < 0$  rezultă că  $f(x) > f(0) = 0$  pentru  $x < 0$ .

În final se obține că  $f(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in R$  adică  $e^x \geq 1 + x$ .

**5. Demonstrați** care din numerele  $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$  sau  $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$  este cel mai mare.

*Rezolvare*

Presupunem că  $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} > (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ , logaritmăm și obținem  $\ln(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} > \ln(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ , de unde  $\frac{\ln(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} > \frac{\ln(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$ . Pentru a demonstra că este adevărat sau fals cercetăm funcția  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

Derivăm funcția  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ , cum  $f'(x) > 0$  pentru  $x \in (0; e)$ ,

iar  $\sqrt{2} \in (0; e)$ , funcția  $f(x) < 0$ , descrește, cum  $f'(x) < 0$  pentru  $x \in (e; +\infty)$   $f(x) > 0$  funcția crește și  $\sqrt{3} \in (e; +\infty)$  și deci  $\frac{\ln(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} < \frac{\ln(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$ .

În încheiere, putem concluziona că demonstrarea inegalităților cu o singură variabilă este bazată pe teoremele de bază a calculului diferențial.

### Bibliografie

1. Bivol, L., Bulat, M., Lecții de analiza matematică, Evrica, Chișinău, 2002.
2. Nicolescu, M., Nicolescu, C., Analiza matematică. Exerciții și probleme pentru elevii claselor XI-XII. Concursul de admitere în învățământul superior, București, 2000.
3. Смирнов, В. И., Курс высшей математики, том 1, 1958.

4. Осипенко, К. Ю., Неравенства для производных аналитических в полосе функций. // Матем. заметки, 56,4 (1994), 114–122.

5. Харди, Г. Г., Литтлвуд, Дж. Е., Полия, Г., Неравенства, ИЛ, М., 1948.

## APLICAREA CALCULUI DIFERENȚIAL LA PROBLEME DE MINIM ȘI MAXIM

*Natalia NEAGU, lector*  
*Sergiu PORT, dr., conf. univ.*

### *Summary*

*The derivative of a function  $f$  of a variable  $x$  is a measure of the rate at which the value of the function changes with respect to the change of the variable. It is called the derivative of  $f$  with respect to  $x$ . If  $x$  and  $y$  are real numbers, and if the graph of  $f$  is plotted against  $x$ , the derivative is the slope of this graph at each point.*

*In this article are presented some problems of maximum and minimum with application the differential calculus - the first order of derivative determine the extremes of the functions and the second order of derivative the concavity and convexity.*

În [matematică](#), derivata unei [funcții](#) este una dintre conceptele fundamentale ale [analizei matematice](#). Derivata unei funcții într-un [punct](#) semnifică rata cu care se modifică valoarea funcției atunci când se modifică [argumentul](#). Cu alte cuvinte, derivata este o formulare matematică a noțiunii de rată de variație. Ea reprezintă un concept foarte versatil. De exemplu, referindu-ne la [graficul](#) bidimensional al funcției  $f(x)$ , derivata într-un punct  $x$  reprezintă [panta](#) [tangentei](#) în punctul dat. De asemenea, ea este folosită la determinarea proprietăților geometrice ale graficelor funcțiilor, cum ar fi:

- extremele funcției - derivatele de ordinul I;