# BUCLE MOUFANG

***ȚARĂLUNGĂ Boris, dr., conf. univ.***

***Summary***

*Is proved that: 1) if the IP loop $(Q,\cdot)$ isotope is the type WIP then, loop $(Q,\cdot)$ is a Moufang loop. 2) if the IP loop $(Q,\cdot)$ isotope is the type WIP$_1$, then loop $(Q,\cdot)$ is a Moufang loop. 3) if the CI loop $(Q,\cdot)$ isotope is the type WIP, then loop $(Q,\cdot)$ is a Moufang comutative loop.*

În teoria buclelor şi cuasigrupurilor, buclele Moufang reprezintă un clas de bucle cel mai intens studiat.

Bucla $(Q,\cdot)$ se numeşte buclă Moufang, dacă pentru orice $x, y, z$ din $Q$ se verifică condiția $(xz \cdot y) \cdot z = x \cdot (z \cdot yz)$ [2,pag.420].

O problemă importantă în teoria buclelor este problema isotopiei. Se spune că bucla $(Q,\cdot)$ este isotopă buclei $(Q,*)$, dacă există substituțiile $\alpha, \beta, \gamma$ a mulțimii $Q$ , încît $\gamma(x * y) = \alpha(x) \cdot \beta(y)$. Bucla $(Q,\cdot)$ se numeşte IP buclă, dacă pentru orice $x$,y din $Q$ se verifică relațiile $xy \cdot Iy = x$ şi $I^{-1}y \cdot yx = x$, unde $Ix = x^{-1}$, iar $I^{-1}x = {}^{-1}x$ [3,pag.70]. Bucla $(Q,\cdot)$ se numeşte CI buclă, dacă pentru orice $x$,y din $Q$ se verifică relația $yx \cdot Iy = x$ [1,pag.450]. Bucla $(Q,\cdot)$ se numeşte WIP buclă, dacă pentru orice $x$,y din $Q$ se verifică relația $y \cdot I(xy) = Ix$ [3, pag.187] . Bucla $(Q,\cdot)$ se numeşte WIP$_1$ buclă, dacă pentru orice $x$,y din $Q$ se verifică relația $I(xy) \cdot I^2 x = Iy$.

În lucrarea dată se demonstrează: 1) dacă pentru bucla IP $(Q,\cdot)$ isotopul este o buclă de tipul WIP, atunci bucla $(Q,\cdot)$ este o buclă Moufang ; 2) dacă pentru bucla IP $(Q,\cdot)$ isotopul este o buclă de tipul WIP$_1$, atunci bucla $(Q,\cdot)$ este o buclă Moufang ; 3) dacă pentru bucla CI $(Q,\cdot)$ isotopul este o buclă WIP, atunci bucla $(Q,\cdot)$ este o buclă Moufang comutativă.

**Teorema1**. Dacă pentru IP bucla $(Q,\cdot)$ isotopul $(Q,*)$ este o buclă WIP , atunci bucla $(Q,\cdot)$ este o buclă Moufang.

Demonstrație. Considerăm isotopul $x * y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y$. Din relația $x * \overline{I}x = ba$ obținem $R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}\overline{I}x = ba$ . Cum $(Q,\cdot)$ este IP buclă , rezultă $\overline{I} = L_b\, R_{ba} I^{-1} R_a^{-1}$.

Fie $(Q,*)$ este o buclă WIP , deci se verifică relația $x * \overline{I}(y * x) = \overline{I}y$. Atunci $R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}\overline{I}\left(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x\right) = \overline{I}y$. Cum $(Q,\cdot)$ este IP buclă avem $L_b^{-1}\overline{I}\left(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x\right) = I^{-1}R_a^{-1}x \cdot \overline{I}y$. Înlocuim $\overline{I}$ şi obținem $R_{ba}I^{-1}R_a^{-1}(y \cdot x) = I^{-1}R_a^{-1}L_b\, x \cdot L_b\, R_{ba}I^{-1}y$. Fie acum $a = 1$. Atunci $R_b I^{-1}(y \cdot x) = I^{-1}L_b\, x \cdot L_b\, R_b I^{-1}y$. Cum substituția $I^{-1}$ posedă proprietatea $I^{-1}(x \cdot y) = I^{-1}(y) \cdot I^{-1}(x)$ în buclele IP, rezultă $R_b(I^{-1}x \cdot I^{-1}y) = R_b^{-1}\, I^{-1}x \cdot L_b\, R_b I^{-1}y$ sau $R_b(x \cdot y) = R_b^{-1}\, x \cdot L_b\, R_b y$. Substituim $x$ prin $R_b x$ . Atunci $R_b(\, R_b x \cdot y)x \cdot L_b\, R_b y$ sau $(xb \cdot y) \cdot b = x \cdot (b \cdot yb)$, deci $(Q,\cdot)$ este o buclă Moufang. Teorema este demonstrată.

**Teorema 2**. Dacă pentru IP bucla $(Q,\cdot)$ izotopul $(Q,*)$ este o buclă WIP$_1$ , atunci bucla $(Q,\cdot)$ este o buclă Moufang.

Demonstrație. Consideram isotopul $x * y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y$. Din relația $x * \overline{I}x = ba$ obținem $R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}\overline{I}x = ba$ . Cum $(Q,\cdot)$ este IP buclă , rezultă $\overline{I} = L_b\, R_{ba} I^{-1} R_a^{-1}$

Fie $(Q,*)$ este o buclă WIP$_1$ , deci se verifică relația $\overline{I}(y * x) * \overline{I}^2 x = \overline{I}y$. Atunci $R_a^{-1}\overline{I}(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y) \cdot L_b^{-1}\overline{I}^2 x = \overline{I}y$. Cum $(Q,\cdot)$ este IP buclă avem $R_a^{-1}\overline{I}\left(R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y\right) = \overline{I}y \cdot IL_b^{-1}\overline{I}^2 x$. Înlocuim $x$ prin $R_a x$, $y$ prin $L_b y$ cît şi $\overline{I}$ şi obținem

$$R_a^{-1}L_b\, R_{ba}I^{-1}R_a^{-1}(x \cdot y) = R_{ba}I^{-1}R_a^{-1}L_b y \cdot IL_b^{-1}L_b\, R_{ba}I^{-1}R_a^{-1}L_b\, R_{ba}I^{-1}x.$$

Punem $a = 1$. Atunci $L_b\, R_b I^{-1}(x \cdot y) = \, = L_b\, R_b I^{-1}\, L_b y \cdot IR_{ba}I^{-1}\, L_b\, R_b I^{-1}x$ . Cum substituția $I^{-1}$ posedă proprietatea $I^{-1}(x \cdot y)$=$I^{-1}y \cdot I^{-1}x$ în bucla IP avem $L_b\, R_b(y \cdot x) = L_b\, R_b\, L_{I^{-1}b}y \cdot R_{Ib}L_b\, R_b x$. Dacă $y = 1$, atunci $L_b\, R_b x = L_b R_{Ib} L_b\, R_b x$, de unde rezultă $R_{Ib}L_b = 1$ şi $R_b L_{I^{-1}b} = 1$. Substituim şi obținem $L_b\, R_b(y \cdot x) = L_b\, y \cdot R_b x$ sau $b \cdot (yx \cdot b) = by \cdot xb$, deci $(Q,\cdot)$ este o buclă Moufang. Teorema este demonstrată.

**Teorema 3.** Dacă pentru CI bucla $(Q,\cdot)$ isotopul $(Q,*)$ este o buclă WIP , atunci bucla $(Q,\cdot)$ este o buclă Moufang comutativă.

Demonstrație. Consideram isotopul $x * y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y$. Din relația $x*Ix=ba$ obținem $R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}\bar{I}x = ba$ . Cum $(Q,\cdot)$ este CI buclă ,rezultă $\bar{I} = L_b\, L_{ba} I^{-1} R_a^{-1}$.

Fie $(Q,*)$ este o buclă WIP , deci se verifică relația $x * \bar{I}(y * x) = \bar{I}y$. Atunci $R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}\bar{I}\left(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x\right) = \bar{I}y$. Cum $(Q,\cdot)$ este CI buclă avem $L_b^{-1}\bar{I}\left(R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x\right) = \bar{I}y \cdot IR_a^{-1}x$. Înlocuim $\bar{I}$ şi obținem $L_{ba}IR_a^{-1}\left( R_a^{-1}y \cdot L_b^{-1}x\right) == L_b L_{ba} I^{-1} R_a^{-1}\, y \cdot IR_a^{-1}x$. Substituim $x$ prin $L_b x, y$ prin $R_a y$ şi obținem $L_{ba}IR_a^{-1}( y \cdot x) = L_b L_{ba} I\, y \cdot IR_a^{-1} L_b x$. Cum $(Q,\cdot)$ este CI buclă $L_{ba} I L_{I^{-1}a}( y \cdot x) = L_b L_{ba} I\, y \cdot I L_{I^{-1}a}\, L_b x$ . În bucla CI substituția $I$ posedă proprietatea $I( y \cdot x) = I(y \cdot x)$. Atunci $L_{ba} L_a( y \cdot x) = L_b L_{ba}\, y \cdot L_a\, L_{Ib} x$. Dacă $b = 1$, obținem $( \cdot ) = \cdot$. Punem $= 1$.Atunci $\cdot = \cdot$ . Înlocuim prin . Atunci $( \cdot ) \cdot = \cdot$. Punem acum y= $1$ şi obținem $( \cdot ) \cdot = \cdot$. Substituim prin . Atunci $( \cdot ) \cdot = \cdot ( \cdot )$ sau $( \cdot ) \cdot = \cdot$, deci $(,\cdot)$ este o buclă Moufang comutativă. Teorema este demonstrată.

## Bibliografie


1. Artzy, R., On loops with special property, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6(1955), pp. 448-453.
2. Mufang, R., Zur Struktur von Alternativ Korpern. *Math. Ann.*1935,110, pp. 416-430.
3. Белоусов, В., *Основы Теории Квазигрупп и Луп*, Издательство «Наука», Москва, 1967.